Kedves Olvasó!

A *Sorok elmélete és numerikus módszerek mérnökhallgatóknak* című könyv elsősorban a Szabadkai Műszaki Szakfőiskola hallgatóinak készült, a harmadik félévben oktatott Numerikus matematika tárgy oktatói és hallgatói segédleteként. Ebből adódik a könyv szerkezete is.

Az első rész a sorozatokkal kapcsolatos alapfogalmakat ismétli át, rámutatva arra, hogy a folytatásban bevezetésre kerülő számsorok tulajdonságai a sorozatok tulajdonságaira vezethetők vissza.

Az első rész további fejezetei a függvénysorokról szólnak. Először a függvénysorok általános tulajdonságairól lesz szó, majd a hatványsorok és a Furiér sorok tulajdonságait taglaljuk.

A második részben olyan közelítő számítási módszerek leírásai szerepelnek, amelyekkel a hallgatók más tárgyak tematikájának kapcsán találkozhatnak. A közelítő számítások és azok hibái, majd a transzcendens egyenletek közelítő megoldása, az interpoláció, a közelítő integrálás és a differenciálegyenletek közelítő megoldása kerül leírásra.

Az alapvető elméleti leírásokat, (és időnként nagyon egyszerű bizonyításokat) minden fejezetben egyszerű példák követik.

A Budapesti Műszaki Főiskola (BMF) és a Szabadkai Műszaki Szakfőiskola sokéves együttműködésének köszönhetően a szerzőnek alkalma nyílt a BMF laboratóriumaiban a MATLAB matematikai programcsomagot alkalmazni, így a könyvben található ábrák némelyike, valamint a számítások egy része a programcsomag segítségével készült el.

A könyv az Apáczay Közalapítvány által a Szabadkai Műszaki Szakfőiskolának nyújtott, a Szabadkai Pax Romana közreműködésével megvalósított 706-17 számú támogatásának köszönhetően jelenhetett meg.

A szerző

Szabadka, 2008.

1 Számsorok. Függvénysorok

1.1 Ismétlés (sorozatok)

1.1.1 Ismétlés. A valós számok R halmaza

Legyen $a, b \in R$, és $a < b$.

Az R halmaz $(a,b) = \{x | a < x < b, x \in R\}$ részhalmazát nyitott intervallumnak nevezzük.

Az R halmaz $[a,b] = \{x | a \le x \le b, x \in R\}$ részhalmazát zárt intervallumnak nevezzük.

Az R halmaz $(a,b] = \{x | a < x \le b, x \in R\}$ részhalmaza balról nyitott, jobbról zárt intervallum.

Megadhatunk további részhalmazokat is, például a következőképpen: $(-\infty, a) = \{x | x < a, x \in R\}$, $[a, \infty) = \{x | x \ge a, x \in R\}$, stb.

A pont környezete a valós számhalmazban

Az a valós szám $e > 0$ (epszilon) környezete az $(a - e, a + e)$ intervallum.

Minden valós számnak számtalan e környezete létezik, az adott $e > 0$ valós számtól függően. Az a valós szám e környezete tartalmazza az a valós számot.

Az $x \in (a,b)$ valós számnak létezik $(a_0, b_0) \subset (a,b)$ környezete.

Ha $a \ne b, (a, b \in \Re)$, akkor léteznek olyan $I_1 = (a - e, a + e)$ és $I_2 = (b - d, b + d)$ intervallumok, amelyekre $I_1 \cap I_2 \ne \emptyset$.

A valós szám abszolút értéke

$$|a| = \begin{cases} a & ha \quad a > 0 \\ 0 & ha \quad a = 0 \\ -a & ha \quad a < 0 \end{cases}$$

A szám abszolút értékére vonatkozó szabályok

$(\forall x \in \Re)\ |a| = |-a|$

$$|a| = \begin{cases} -a & ha \quad -a < a \\ a & ha \quad -a > a \end{cases}$$

$|a| < b \wedge b > 0 \Rightarrow -b < a < b$

Az $|a-b|$ kifejezés számértéke egyenlő az a és b számok illetve a számegyenesen hozzájuk tartozó pontok távolságának mérőszámával. A következő szabályok érvényesek:

a) $|a+b| \le |a| + |b|$

b) $||a| - |b|| \le |a+b|$

c) $|ab| = |a| \cdot |b|$

d) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

1.1.2 Számsorozatok. Ismétlés

Ha a természetes számok halmazához $(n \in N)$ hozzárendeljük rendre az $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ számhalmaz elemeit, számsorozatot kapunk, amelyet $\{a_n\}$ módon jelölünk.

Véges sok elemből álló $a_1, a_2, ..., a_n$ számsorozatot végesnek, a végtelen sok elemből álló $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sorozatot végtelen sorozatnak nevezzük. A sorozat általános tagja a_n.

Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen adhatjuk meg:

- általános tagjával, például: $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n^2}$,
- egymást követő elemeinek megadásával, például: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ...$
- rekurzív formulával: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$.

Két sorozat akkor egyenlő, ha megfelelő elemik egyenlők.

Ha az $\{a_n\}$ sorozat elemeire igaz, hogy $a_{n+1} > a_n$, $(\forall n \in N$ indexre) akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő, ha $a_{n+1} \geq a_n$ akkor monoton növekvő. Ha $a_{n+1} < a_n$, $(\forall n \in N$ indexre) akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő, ha $a_{n+1} \leq a_n$ akkor monoton csökkenő.

A T pont a sorozat torlódási pontja, ha a T pont környezetében a sorozat végtelen sok eleme helyezkedik el.

A számsorozatok konvergenciája

Az $\{a_n\}$ sorozatnak létezik határértéke, és a határértéke a ha $(\forall e > 0)(\exists n_e \in N)(\forall n > n_e)|a_n - a| < e$. Mindezt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ vagy $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ módon jelöljük.[1]

A definícióból következik, hogy az a határérték e környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme helyezkedik el.

Ha az $\{a_n\}$ sorozatnak létezik $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a < \infty$ határértéke, akkor konvergens sorozatnak nevezzük, egyébként a sorozat divergens. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat határozottan divergens, mint például az $\{n^2\} = \{1,4,9,16,\ldots\}$ sorozat, hiszen $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

A $\{(-1)^{\backslash n}\} = \{-1,1-1,1,\ldots\}$ sorozat divergens, de nem határozottan divergens, hiszen határértéke nem $\pm\infty$.

Ha a sorozat konvergens, akkor határértéke egyértelmű.

A konvergens sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, és az nem más, mint a sorozat határértéke. A határérték tehát egyben torlódási pont is, ugyanakkor nem minden torlódási pont lehet határérték. Például a $\{-1,1-1,1,\ldots\}$ sorozatnak két torlódási pontja van, az 1 és a -1, és divergens, hiszen mindkét torlódási pontra

[1] A definíciót így olvassuk: bármely pozitív e számhoz létezik olyan e -tól függő n_e küszöbindex, amelytől a sorozat minden tagja az a határérték e környezetlben van.

igaz, hogy a környezetén kívül a sorozatnak további végtelen sok eleme van, és a sorozat konvergenciájának feltételei nem teljesülnek.

Ha a sorozatból elhagyjuk annak véges vagy végtelen sok elemét, a fennmaradt végtelen sok elemből álló sorozatot részsorozatnak nevezzük.

Példa. Az $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$ sorozatot szétválaszthatjuk a $\left\{-\frac{1}{2n+1}\right\}$ és $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ részsorozatokra.

A számsorozatok korlátossága

A k számot az $\{a_n\}$ sorozat alsó korlátjának nevezzük, ha $(\forall n \in N)(a_n \geq k)$.

A K számot az $\{a_n\}$ sorozat felső korlátjának nevezzük, ha $(\forall n \in N)(a_n \leq K)$.

Ha létezik az adott tulajdonságú k illetve K szám, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat alulról, illetve felülről korlátos. Ha a sorozat alulról és felülről is korlátos, akkor korlátos.

Minden konvergens sorozat korlátos, de ez fordítva nem igaz: azaz a korlátosság önmagában nem elegendő feltétele a konvergenciának. Igazak viszont a következő állítások:

- minden felülről korlátos, monoton növekvő sorozat konvergens, és
- minden alulról korlátos, monoton csökkenő sorozat konvergens.

A sorozatok konvergenciájának megállapításakor gyakran hivatkozunk arra, hogy ha a sorozatot alulról egy határozottan divergens sorozat korlátozza, akkor maga is divergens lesz. Fontos tehát kimondani a következőket:

- ha $(\forall K \in \Re)(\exists n_K \in N)(\forall n > n_K)a_n > K$, akkor a sorozat határozottan divergens, azaz $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$;
- ha $(\forall k \in \Re)(\exists n_k \in N)(\forall n > n_k)a_n < k$, akkor a sorozat határozottan divergens, azaz $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

Az ismert határértékű sorozatok konvergenciája alapján további sorozatok konvergenciájára vagy divergenciájára következtethetünk:

- ha $a_n \to 0 \wedge a_n > 0 \wedge n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \infty$;
- ha $a_n \to 0 \wedge k \in \Re \wedge n \to \infty \Rightarrow k \cdot a_n \to 0$;
- ha $a_n \to 0 \wedge a_n < 0 \wedge n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to -\infty$;
- ha $a_n \to \infty \wedge c > 0 \Rightarrow c \cdot a_n \to \infty$.

Sorozatok konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele (Cauchy[2] kritérium)

Az $\{a_n\}$ sorozat **akkor és csak akkor** konvergens ha fennáll, hogy bármely $e > 0$ számra létezik olyan n_e küszöbindex, amelytől kezdődően bármely $p \in N$ (természetes) számra igaz, hogy $|a_n - a_{n+p}| < e$, azaz:

$$(\forall e > 0)(\exists n_e)(\forall n > n_e)(\forall p \in N), |a_n - a_{n+p}| < e .$$

Az „**akkor és csak akkor**” azt jelenti, hogy

- ha a sorozat konvergens, akkor igaz a feltétel (azaz a feltétel *szükséges feltétele a konvergenciának*), és azt is hogy
- ha a feltétel igaz, akkor a sorozat konvergens (azaz a feltétel *elégséges feltétele a konvergenciának*).

A Cauchy kritérium a gyakorlatban azt jelenti, hogy a határérték bármely környezetében bármely két sorozatelem közötti távolság egy küszöbindextől kezdődően e -tól kisebb, azaz az elemek távolsága egyre kisebb.

[2] Cauchy, Augustin Louis (1789-1857.). Francia matematikus, aki nagyszámú jelentős gyakorlati probléma matematikai modelljét adta meg.

1.2 Számsor[3]

Legyen adott az $\{a_n\}$ számsorozat. Az

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

számkifejezést végtelen *számsornak* nevezzük. Általános tagja (összeadandója) a_n .

Az $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ véges sok elem (tag) összege, tehát *véges sor.* A sorösszeg is véges szám.

A végtelen sok összeadandóból álló sor összege nem mindig véges szám. Az $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorösszeg meghatározásához bevezetjük a részösszeg fogalmát.

Az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor első n összeadandójából álló $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ véges sort az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor részösszegének nevezzük. A részösszegek sorozatot alkotnak, az $\{S_n\}$ sorozatot. Felírhatjuk tehát, hogy:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

…

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

…

Belátható, hogy a végtelen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor nem más, mint az S_∞ részösszeg, azaz hogy a teljes sorösszeg $S = S_\infty = \lim_{n \to \infty} S_n$ nem más mint a részösszegek sorozatának

[3] Figyeljünk a sor és sorozat fogalmának különbségére!

határértéke. Az $\{S_n\}$ sorozat konvergenciája tehát egyenértékű az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorösszeg létezésével (mondhatjuk azt is, hogy az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájával).

Az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha az összeg véges szám, azaz ha a részösszegek sorozata konvergens, tehát ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$ létezik és nem $\pm\infty$. Ha a sor nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.

Példa. Az $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\backslash n}$ sor divergens, mert

$S_1 = -1$

$S_2 = -1 + 1 = 0$

$S_3 = -1 + 1 - 1 = -1$

…

$$S_n = \begin{cases} -1 & ha \quad n = 2k+1 (páratlan) \\ 0 & ha \quad n = 2k (páros) \end{cases}$$

Az $\{S_n\}$ sorozatnak tehát két torlódási pontja van, ezért nem konvergens.

Példa. Az $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + ...$ sor divergens, mert divergens a részösszegeinek sorozata:

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 4 = 5$

$S_3 = 1 + 4 + 9 = 14$

…

Belátható, hogy $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

Példa. Az $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$ alakú sort a mértani sornak nevezzük. Általános tagja: $a_{n+1}=a_n\cdot q=a\cdot q^{n-1}$. A részösszegek sorozata:

$$S_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^n=a\left(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}\right)=a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

A végtelen sor összege:

$$S=a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots=\lim_{n\to\infty}S_n=$$

$$\lim_{n\to\infty}a\frac{1-q^n}{1-q}=\begin{cases}\infty & ha\quad |q|>1 \text{ (ez azt jelenti, hogy a sor divergens),}\\ a+a+a\ldots & \\ vagy & ha\quad |q|=1 \text{ (ez azt jelenti, hogy a sor divergens),}\\ a-a+a\ldots & \\ a\dfrac{1}{1-q} & ha\quad |q|<1 \text{ (ez azt jelenti, hogy a sor konvergens).}\end{cases}$$

Példa. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

ahol $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\ldots=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Ebből: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

1.2.1 Sormaradék

Az $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sor maradéka: $R_n=|S-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots|$.

A konvergens sorok maradékainak sorozata nullához tart: $R_n\to 0$.

A sorok maradékára mindig felső becslést adunk, azaz azt adjuk meg, hogy $R_n < K$, ahol K a sormaradék felső korlátja.

1.2.2 Konvergens sorok tulajdonságai

A sorok konvergenciájának meghatározása a részösszegek sorozatának konvergenciájának meghatározására vezethető vissza.

Ha a sor véges sok összeadandóját elhagyjuk, akkor a sor konvergenciája nem változik, azaz ha az eredeti sor konvergens volt, akkor a kapott sor is az, és ha az eredeti sor divergens volt, akkor a kapott sor is divergens marad.

Ha az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ sorok konvergensek, (és sorösszegük rendre *S* és *T*), akkor:

- az a sor, amelynek tagjai a két sor tagjainak összegéből származtatható, ugyancsak konvergens, és sorösszege: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = S + T$;
- az a sor, amelynek tagjai a konvergens sor tagjainak adott c számú többszörösei, ugyancsak konvergens, és sorösszege: $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot S$.

1.2.3 A sor konvergenciájának szükséges feltétele

A sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy általános tagja (azaz összeadandóinak sorozata) nullához tartson, azaz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \wedge |S| < \infty \Rightarrow a_n \to 0 \text{ ha } n \to \infty .$$

Az állítás bizonyítása nagyon egyszerű.

Ha a sor konvergens, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, akkor

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) =$$

(ha a sor konvergens a különbség határértéke egyenlő a kisebbítendő és a kivonandó határértékének különbségével)

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Ezzel a bizonyítást elvégeztük.

Figyeljük meg: a feltétel szükséges, de nem elégséges, azaz **ha** a sor konvergens, **akkor** az általános tag nullához tart, de ez az állítás fordítva nem mindig igaz. Ha ugyanis az általános tag nullához tart, az nem jelenti minden esetben azt, hogy a sor konvergens!

Példa. A fenti állítást a *harmonikus sor*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

példáján mutatjuk majd meg, mégpedig több kritérium alapján.

1.2.4 A sorok konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele (a Cauchy kritérium alapján)

Az $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor, amely részösszegeinek sorozata $\{S_n\}$ **akkor és csak akkor** konvergens, ha

$$(\forall e > 0)(\exists n_e)(\forall n > n_e)(\forall p \in N), \left|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+p}\right| < e \ .$$

Az adott feltételből tehát következik a sor konvergenciája, a konvergenciából pedig következik a feltétel. A feltétel azt jelenti, hogy bármely megadott, nullához közeli e pozitív számra található olyan n_e küszöbindex, amelytől kezdődően a sor akárhány tagjának összege e -tól kisebb lesz.

A kritérium szoros kapcsolatban áll a sorozatok konvergenciájára vonatkozó szükséges és elégséges Cauchy kritériummal, hiszen a sor konvergenciája a részösszegek sorozatának konvergenciájával egyenértékű.

Legyen $\{S_n\}$ az $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor részösszegeinek sorozata. A sorozatok konvergenciájára vonatkozó szükséges és elégséges Cauchy kritérium alapján: $(\forall e > 0)(\exists n_e)(\forall n > n_e)(\forall p \in N), \left|S_{n+p} - S_n\right| < e$, ami azt jelenti, hogy $\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{n+p}\right| < e$, a feltételben adott e, n_e és p értékekre.

Példa. Az $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ harmonikus sor általános tagja nullához tart: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, ha $n \to \infty$. A sor mégsem konvergens, mert a Cauchy kritérium feltételei alapján felírhatjuk:

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{n+p}\right| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... \frac{1}{n+p}\right|.$$

A sor tagjai pozitívak, a feltétel pedig minden p-re igaz, igaz tehát $p=n$ esetében is. A fenti kifejezésbe ezt behelyettesítve:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + ... + \frac{1}{n+n} = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

vagyis tetszőleges számú tag összege nem lesz tetszőlegesen kis szám, hanem alulról (legalább) az $\frac{1}{2}$ korlátozza. Cauchy kritérium feltételeinek tehát a sor nem tesz eleget, és tekintettel arra, hogy ez szükséges és elégséges feltétele a konvergenciának, a konvergencia sem áll fenn.

1.2.5 Sorok korlátossága

Az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor korlátos, ha részösszegeinek sorozata, azaz $\{S_n\}$ korlátos.

Ha az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor korlátos.

Megjegyzés. A fenti állítás fordítottja nem mindig igaz, azaz a korlátos sor nem mindig konvergens. Példaként újra a

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1-1+\ldots$ sort említhetjük, hiszen,

$S_n = \begin{cases} -1 & ha \quad n = 2k+1 \\ 0 & ha \quad n = 2k \end{cases}$, tehát $-1 \le S_n \le 0$, tehát $\{S_n\}$ korlátos, de $\lim_{n\to\infty} S_n$ nem létezik, tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1-1+\ldots$ sor nem konvergens.

1.2.6 Pozitív tagú sorok konvergenciája

Ha az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor tagjai nem negatívak (pozitívak vagy esetleg van közöttük 0 értékűek), azaz $a_n \ge 0$,($\forall n \in N$), akkor a sorra azt mondjuk, hogy a pozitív tagú. Minden korábban leírt, a sorokra általában vonatkozó állítás a pozitív tagú sorokra is igaz, de ezen felül további állításokat is bizonyíthatunk, ha tudjuk, hogy a sor tagjaira igaz, hogy $a_n \ge 0$.

A pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha részösszegeinek sorozata korlátos.

Az állítás bizonyítás egyszerű, hiszen ha a sor tagjai pozitívak, akkor a részösszegek $\{S_n\}$ sorozata monoton növekvő, és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tétel alapján ha korlátos is, akkor konvergens. Röviden:

($\{S_n\}\uparrow$, azaz monoton növekszik, ha $a_n \ge 0$) $\wedge$ ($\{S_n\}$ korlátos, ($S_n < K < \infty$))$\Rightarrow$($\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$ létezik, azaz a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens).

A sorok konvergenciájának kivizsgálására gyakorlatiasabb kritériumokat alkalmazunk, amelyeknek a bizonyítása az eddig felsorolt állításokon alapul.

1.2.7 Pozitív tagú számsorok konvergencia-kritériumai (a konvergencia elégséges feltételei)

1.2.7.1 Majoráns és minoráns kritérium

Legyenek adottak az

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ és $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ pozitív tagú sorok, és legyen részösszegeiknek sorozata rendre:

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ Iés $T_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. Legyen továbbá $u_i < v_i$, minden i=1,2,…∞ indexre.

Majoráns kritérium: Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sor konvergál, akkor az $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sor is konvergál.

Ez azt jelenti, hogy ha a „nagyobb” sor konvergál, akkor van felső korlátja ($T_n \to T \Rightarrow T_n < K$), és K egyben a „kisebb sor” felső korlátja is, hiszen $u_i < v_i$, tehát $S_n < T_n (< K)$. A részösszegek sorozata monoton növekvő, mert a sor pozitív összeadandókból áll, továbbá felülről korlátos, tehát mindkét sor konvergens.

Minoráns kritérium. Ha az $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sor is divergens.

Ez azt jelenti, hogy ha a „kisebb” sor divergál, akkor a „nagyobb sor” is divergál.

1.2.7.2 Gyökkritérium

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ pozitív tagú sor, és a legyen 0<q<1 valós szám.

Ha bizonyítható, hogy:

- létezik olyan q amelyre a sor minden u_n tgajának n-dik gyöke az n_q küszöbindexétől kezdődően kisebb, mint q, (és ezáltal kisebb mint 1), vagy

- ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \le q < 1$ (azaz az $\sqrt[n]{u_n}$ sorozat legkisebb felső korlátja kisebb mint 1),

akkor az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ sor konvergens.

Az állítást a következőképpen bizonyíthatjuk: Korábbi példából tudjuk, hogy az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ mértani sor, amelynek q szorzója kisebb mint 1, konvergens (a vizsgált esetben legyen $q > 0$, hiszen pozitív tagú sorokat vizsgálunk). Egyébként a mértani sor divergens.

A gyökkritérium feltételei szerint:

$$\sqrt[n_q]{u_{n_q}} \le q \Rightarrow u_{n_q} \le q^{n_q}$$

$$u_{n_q+1} \le q^{n_q+1}$$

$$u_{n_q+2} \le q^{n_q+2}$$

$$\ldots$$

$$\sum \quad \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$u_{n_q} + u_{n_q+1} + u_{n_q+2} + \ldots \le q^{n_q} + q^{n_q+1} + q^{n_q+2} + \ldots =$$

$$q^{n_q}\left(1 + q + q^2 + \ldots\right)$$

Az egymást követő tagok összegét tehát egy mértani sorral hasonlítjuk össze. A mértani sor felülről határolja az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ sort, és akkor konvergens, ha $q < 1$, így a majoráns kritérium alapján ha $q < 1$, akkor a „kisebb” $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ sor is konvergál. Hasonló eljárással megvizsgálhatjuk az $\sqrt[n]{u_n} \ge q$ kapcsolatból eredően, hogy mi történik ha q>1. Az összehasonlító mértani sor most alulról határolja majd az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ sort, és lévén q>1, a mértani sor divergens. Ennek következményeképpen a tőle „nagyobb” $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ sor is divergens a minoráns kritérium alapján.

Ha q=1, a bizonyítási eljárás nem értékelhető, ezért más kritériumot kell alkalmazni.

Foglaljuk tehát össze a gyökkritérium lényegét:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q\begin{cases}<1 & \textit{a sor konvergens}\\ =1 & \textit{folyamodjunk más kritériumhoz}\\ >1 & \textit{a sor divergál}\end{cases}.$$

1.2.7.3 D¢Alembert[4] hányados kritériuma

Legyen $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ pozitív tagú sor, és a legyen 0<q<1 valós szám.

Ha bizonyítható, hogy:

- létezik olyan q amelyre a sor minden u_{n+1}–dik és u_n–dik tagjának a hányadosa az n_q küszöbindexétől kezdődően kisebb, mint q, (és ezáltal kisebb mint 1), vagy
- ha $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q<1$ (azaz az $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sorozat legkisebb felső korlátja kisebb mint 1),

akkor az $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ sor konvergens.

Az állítást így bizonyíthatjuk:

$$\frac{u_{n_q+1}}{u_{n_q}}\le q\Rightarrow u_{n_q+1}\le u_{n_q}\cdot q$$

$$u_{n_q+2}\le u_{n_q+1}\cdot q$$

$$u_{n_q+3}\le u_{n_q+2}\cdot q$$

$$\ldots$$

$$\sum \quad \overline{}$$

$$u_{n_q+1}+u_{n_q+2}+\ldots\le u_{n_q}q\left(1+q+q^2+\ldots\right)\le u_{n_q}q\frac{1}{1-q}$$

Az egymást követő tagok összegét az $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ sorban tehát egy mértani sorral felülről határoljuk, és a mérteni sor akkor konvergens, ha $q<1$, így a majoráns kritérium

[4] D′Alembert, Jean Le Rond (1716-1783) francuski matematičar ifizičar.

alapján ha $q<1$, akkor a tőle „kisebb” $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sor is konvergál. Hasonló eljárással megvizsgálhatjuk az $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$ kapcsolatból eredően, hogy mi történik ha $q>1$. Az összehasonlító mértani sor most alulról határolja majd az $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sort, és lévén $q>1$, a mértani sor divergens. Ennek következményeképpen a tőle „nagyobb” $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sor is divergens a minoráns kritérium alapján.

Ha $q=1$, a bizonyítási eljárás nem értékelhető, ezért más kritériumot kell alkalmazni.

Foglaljuk tehát össze a gyökkritérium lényegét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \begin{cases} <1 & a\ sor\ konvergens \\ =1 & folyamodjunk\ más\ kritériumhoz \\ >1 & a\ sor\ divergál \end{cases} .$$

1.2.7.4 Bólyai Farkas[5] - Raabe[6] kritérium

A kritérium elsősorban akkor hasznos, ha a gyökkritérium és a hányados kritérium alkalmazásakor nem jártunk eredménnyel (mert $q=1$ volt). A kritérium pontosabb becslést ad a sor tagjainak viszonyával kapcsolatban. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ pozitív tagú sor, és a legyen $0<q<1$ valós szám.

Ha bizonyítható, hogy:

[5] Bólyai Farkas, 1775. február 9-én született Bolyán. Új eljárással határozta meg néhány egyenlet közelítő gyökét, s konvergenciakritériumot állított fel a később Raabe-ről elnevezett pozitív tagú végtelen sorokra. Marosvásárhelyen hunyt el 1856. november 20-án.

[6] Joseph Ludwig Raabe (1801-1859), svájci matematikus

- létezik olyan q amelyre a sor bármely két egymást követő tagjára, az n_R küszöbindextől kezdődően $n\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=R$, és $R>1$, vagy
- ha $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=R>1$ (azaz az $n\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ sorozat legnagyobb alsó korlátja nagyobb mint 1),

akkor az $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sor konvergens.

Ha a kritérium feltételei mellett azt kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=R<1$, akkor az $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sor divergens.

Ha R=1, a bizonyítási eljárás nem értékelhető, ezért más kritériumot kell alkalmazni.

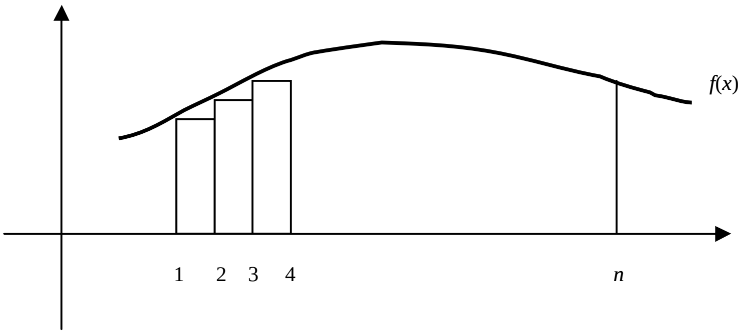
1.2.7.5 Chauchy integrálkritériuma

Ha az $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$ improprius integrál konvergál, akkor konvergál a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ sor is.

Ha az $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$ improprius integrál divergál, akkor divergál a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ sor is.

Az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál eredménye, a definíció szerint, egyenlő annak a területnek a mérőszámával, amelyet az $f(x)$ függvény grafikonja határol az $[a,b]$ intervallum felett. Az $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$ improprius integrálra is ez vonatkozik. Ha közelítő számítási módszerrel számítanánk a kérdéses területet, akkor annak mérőszámát közelítően kiszámíthatnánk olyan téglalapok területeinek az összegével, amelyeknek az Ox tengelyen fekvő alapja 1 (és a csúcsok az egész számokat jelülő pontokban fekszenek), a magassága pedig *f*(*n*) (ahogyan azt az ábra is mutatja), azaz $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^n f(x)dx \approx \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} 1\cdot f(n)$.

Ha a $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} 1\cdot f(n) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} 1\cdot f(n) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(n)$ sort úgy értelmezzük, mint az $f(n)$ általános tagú sort, akkor egyértelmű, hogy a $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^n f(x)dx$ improprius integrál konvergenciája és az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergenciája egyenértékű.



Példák

1. Vizsgáljuk ki az integrálkritérium segítségével a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ sor konvergenciáját ($a \in \Re$).

Az $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ sor $\frac{1}{n^a}$ általános tagjának az $f(x)=\frac{1}{x^a}$ függvény feleltethető meg. A konvergenciát a következő (improprius) integrál konvergenciájának segítségével állapíthatjuk meg:

$\int\limits_1^n f(x)dx = \int\limits_1^n \frac{1}{x^a}dx = \left(\frac{x^{-a+1}}{-a+1}\right)_1^n = \frac{n^{-a+1}}{-a+1} - \frac{1^{-a+1}}{-a+1} = \frac{1}{-a+1}\left(n^{-a+1}-1\right)$, illetve a megfelelő improprius integrált felírva:

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{-a+1}\left(n^{-a+1}-1\right)=$$

$$\frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{a-1}}-1\right)=\begin{cases} divergens, ha & a\le 1,\\ konvergens, ha & a>1.\end{cases}$$

2. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{2n^2+1}$ sor?

Első lépésként mindig vizsgáljuk ki, eleget tesz-e a sor a konvergencia szükséges feltételének (azaz nullához tart-e az általános tagok sorozata), mert ha nem teljesül ez a feltétel, akkor a sor biztosan nem konvergens, és a további vizsgálatoktól eltekinthetünk.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-n\right)/n^2}{\left(2n^2+1\right)/n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}\neq 0$, a sor tehát nem konvergál, divergens.

3. Ha a sor általános tagja egy kifejezés *n*-dik hatványa, mindenképpen próbálkozzunk a gyökkritériummal, mert általában eredményhez vezet.

Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{n+1}}{3^n}$ sor?

A sor általános tagjainak sorozata a nullához tart:

$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^{n+1}}{3^n} = \lim_{n\to\infty} 2n\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, tehát a konvergencia szükséges feltételének a sor eleget tesz. Lássuk, eleget tesz valamelyik elegendő feltételnek is, például a gyökkritériumnak:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n\cdot 2^{n+1}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n\left(\frac{2}{3}\right)^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1\cdot 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1,$$

Az $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{n+1}}{3^n}$ sor tehát konvergens.

4. Ha a sor általános tagja racionális törtkifejezés, akkor leggyakrabban a hányados-kritérium vezet eredményhez.

Konvergens-e az $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{(2n+1)!}$ sor? .

A sor általános tagjainak sorozata a nullához tart:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)} \frac{(n+1)}{(2n-1)} \frac{(n+1)}{(2n-3)} \frac{1}{(2n-5)\ldots 3\cdot 1} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-5)\ldots 3\cdot 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 0 = 0$$

tehát a konvergencia szükséges feltételének a sor eleget tesz. Lássuk, eleget tesz valamelyik elegendő feltételnek is, például a hányados-kritériumnak:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)^3}{(2n+3)!}}{\frac{(n+1)^3}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^3}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{(n+1)^3} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^3}{(n+1)^3} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^3 \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+3)} =$$

$$1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)} = 1\cdot 0 = 0 < 1.$$

Az $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{(2n+1)!}$ sor tehát konvergens.

5. Ha a sor konvergenciájának vizsgálatakor nem vezet eredményre a hányados- vagy a gyökkritérium, akkor próbálkozzunk a Raabe kritériummal. Tegyük ezt a a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n)!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$ sor esetében is, ahol $a > 0, a \in \Re$.

A sor általános tagjainak sorozata a nullához tart. (Bizonyítsa ezt az olvasó önállóan!)

Próbálkozzunk a a hányados- vagy a gyökkritériummal! A számított határérték 1, tehát a két kritérium nem adott választ a konvergencia kérdésére. Alkalmazzuk tehát a Raabe kritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\dfrac{(n)!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}}{\dfrac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)(a+n+1)}}-1\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n)!}{(n+1)!}\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)(a+n+1)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}-1\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(a+n+1)}{(n+1)}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(a+n+1)-n-1}{(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)}\right)a=a\cdot 1=a$$

Ebből következik, hogy:

- ha $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=a>1$, akkor a sor konvergens,

- ha $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=a<1$, akkor a sor divergens,

- ha $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=a=1$, akkor más kritériumot kell alkalmaznunk.

1.2.8 Változó előjelű sorok

Legyen az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ általános tagja valós szám: $a_n \in \Re$. Előfordul, hogy a sor általános tagjainak előjele változik.

Példa:

1. A következő sor tagjainak előjele változó, (de nem váltakozik):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{2}+\frac{\sin 3}{3}+\frac{\sin 4}{4}+\ldots+\frac{\sin n}{n}+\ldots=$$

$$\frac{0.8415}{1}+\frac{0.9093}{2}+\frac{0.1411}{3}+\frac{-0.7568}{4}+\frac{-0.9589}{5}\ldots+\frac{\sin n}{n}+\ldots$$

2. Írjuk fel a váltakozó előjelű harmonikus sort!

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$$

Bizonyítottuk, hogy a pozitív tagokból álló sor divergens, ugyanakkor a váltakozú előjelű sor szomszédos tagjai nagyjából semlegesítik egymást. Vajon ez vezethet a váltakozó előjelű sor konvergenciájához?
A válaszst a **Leibniz-kritérium**[7] adja meg.

Legyen az

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$ váltakozó előjelű (alternáló) sor, ahol $b_n > 0$, és amelyet felírhatunk

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} |a_n| = |a_1| - |a_2| + |a_3| - |a_4| + \ldots$$

alakban is.
Ha az alábbi három feltétel mindegyike teljesül:

1. $a_n \to 0$,
2. a_n váltakozó előjelű sorozat ,
3. az $|a_n|$ sorozat monoton csökkenő,

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

A függvénysorok maradékának becslése szempontjából fontos a Leibniz kritérium egyik következménye, mely szerint ha a váltakozó előjelű sor konvergens és a sorösszeg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, akkor a sorösszeg és az *n*-ed rendű részösszeg közötti különbség kisebb a sor következő tagjától:

$$\left| A - \sum_{n=1}^{M} a_n \right| = |A - S_M| \le a_{M+1} .$$

Az olyan sort, amelynél a tagok abszolút értékeiből megalkotott sor konvergens, ***abszolút konvergens*** sornak nevezzük.

[7] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. július 1.−1716. november 14.), német matematikus

Ha a váltakozó előjelű sor abszolút konvergens, akkor maga is konvergens, hiszen eleget tesz a Leibnicz feltételeknek: tagjainak abszolút értékéből alkotott sorozat monoton csökkenő, általános tagja nullához tart, és tagjai váltakozó előjelűek.

A fordított állítás nem igaz, hiszen nem minden konvergens, váltakozó előjelű sor konvergens:

Ha a sor abszolút konvergens $\Rightarrow$ konvergens a megfelelő váltakozó előjelű sor is.
Ha a sor konvergens, abból **nem következik** a sor abszolút konvergenciája.

Példa erre a harmonikus sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ ,$$

amelyről bizonyítottuk, hogy divergens.
A váltakozó előjelű harmonikus sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

viszont konvergens, mert az általános tagjaiból alkotott sorozat nullához tart, a tagok abszolút értékéből alkotott $\left\{|1|,\left|-\frac{1}{2}\right|,\left|\frac{1}{3}\right|,\left|-\frac{1}{4}\right|,\ldots\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$ sorozat monoton csökkenő. A váltakozó előjelű harmonikus sor tehát konvergens a Leibniz kritérium alapján, de ne abszolút konvergens, mert az abszolút (pozitív) tagokból álló sorról korábban bizonyítottuk, hogy divergens.

1.3 A függvénysor

Legyen a adott az $\{f_n(x)\}$ sorozat ($n \in N$), amely különböző, *n*-től függő függvények sorozat. Ilyen például az $\{e^{nx}\} = \{e^x, e^{2x}, e^{3x}, \ldots\}$, vagy az $\{x^n\} = \{x, x^2, x^3, \ldots\}$ függvénysorozat.

Ha az x változó helyére a függvények értelmezési tartományából való értéket helyettesítünk, akkor egy számsorozatot kapunk, amelynek tulajdonságait hasonlóképpen vizsgálhatjuk, mint a számsorozatokét.
Ha felírjuk egy végtelen függvénysorozat elemeinek összegét, akkor *függvénysort* kapunk, amelyet

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$$

módon jelölünk.

Ha az $f_i(x)$ függvénytagokba a függvények értelmezési tartományából való x_0 értéket helyettesítjük, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \ldots$$

számsort kapjuk, és tulajdonságait hasonlóképpen vizsgálhatjuk, mint a számsorokét.

Ha az $f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \ldots$ számsor konvergens, akkor az x_0 pontot az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor *konvergencia-pontjának* nevezzük. A függvénysor összes konvergencia-pontjainak halmazát *konvergencia-tartománynak*, az így definiált konvergenciát pedig *pontonkénti konvergenciának* nevezzük.

Példa. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

Adott x-re a sor nem más, mint egy mértani sor, amelynek szorzója x, és akkor konvergens, mint tudjuk, ha $|x| < 1$. Az $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ sornak tehát minden olyan pont konvergencia-pontja, amely a (–1,1) intervallumból való, a konvergencia-tartomány tehát D=(–1,1).

Ha az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysorra a konvergencia-tartomány egy x_0 pontjában igaz, hogy az $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ sor konvergens, akkor azt mondjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ abszolút konvergens. (Az abszolút konvergenciából itt is következeik a konvergencia, természetesen a pontonkénti).

1.3.1 Függvénysorok egyenletes konvergenciája

Ugyancsak az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ függvénysor példájából láthatjuk, hogy a függvénysor összegét az x változótól függetlenül is meghatározhatjuk, hiszen ebben a példában:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

mint minden más mértani sor esetében is, természetesen ha $-1 < x < 1$. Megállapíthatjuk, hogy létezik olyan $f(x) = \frac{1}{1-x}$ függvény,amelynek értékei a konvergencia-pontokban egyenlők az $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ függvénysor, illetve sorösszeg értékeivel, és a konvergencia-tartomány x pontjaiban az

$s_n(x)=\sum_{i=1}^{n} x^i$ részösszegek sorozata az $f(x)=\frac{1}{1-x}$ értékekhez tart, vagyis $s_n(x)\to f(x)$.

Mondhatjuk azt is, hogy ebben a tartományban a függvénysornak $f(x)=\frac{1}{1-x}$ a határfüggvénye (azaz „határértéke”).

Ha számsorok értelmezéséből indulunk ki, akkor általánosságban azt mondhatjuk, hogy ha egy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots$ függvénysor D konvergencia-tartományába tartozó x pontokra a függvénysor $s_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ részösszegeinek sorozata konvergens, és az $f(x)$ értékek felé tart, akkor

1. az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots$ függvénysor pontonként konvergál az $f(x)$ függvényhez a konvergencia-tartományon belül, másrészt ha
2. teljesül az a feltétel, amely szerint bármely e kicsi számra létezik olyan n_e küszöbindex, amelytől kezdődően

   $|f(x)-s_n(x)|<e$, $(x\in D)$,

   akkor az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots$ függvénysor *egyenletesen konvergál* az $f(x)$ függvényhez.

Hogy egyszerűsítsük a jelölést, ilyenkor írhatjuk azt is, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f(x)$.

Az $|f(x)-s_n(x)|<e$ feltételt tovább vizsgálva, a következőket állapíthatjuk meg:

- ha egyre kisebb e értéket vizsgálunk, és egyre nagyobb lesz a küszöbindex ($n_e \to \infty$) akkor $|f(x)-s_n(x)|<e \Rightarrow \left|f(x)-\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right|<e$, és az x pontban számított $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor-értékek gyakorlatilag illeszkednek az $f(x)$ függvény grafikonjára.
- ha ennek következtében figyelmen kívül hagyjuk az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ és $f(x)$ közötti elhanyagolható különbséget, akkor $|f(x)-s_n(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)\right| = R_n(x) < e$,

  $R_n(x)$ azaz a sormaradék is elhanyagolhatóan kicsi (nullához közelít).

Megjegyzés. A függvénysor egyenletes konvergenciájából következik a pontonkénti konvergencia a konvergencia-tartományban, de az állítás fordítottja nem minden esetben igaz.
Ha ugyanis a konvergencia-tartomány pontjaiban a függvénysor (pontonként) konvergál, az még nem jelenti azt, hogy ezek a pontok illeszkednek egy olyan függvényre, amelyhez a függvénysor egyenletesen konvergálna.

Az egyenletes konvergencia kivizsgálása a definíció alapján történhet, vagy alkalmazható a *Weierstrass*[8]*-féle elégséges feltétel*. A feltétel szerint, ha az abszolút függvénysort felülről behatárolhatjuk egy konvergens numerikus sorral, akkor a függvénysor egyenletesen konvergens.

Ha tehát az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysorhoz létezik olyan konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ numerikus sor, amelyre $|f_n(x)|<b_n$, $(n=1,2,3,\ldots)$ minden x-re a D konvergencia-

[8] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815. október 31. - 1897. február 19.) német matematikus, a modern függvényelmélet egyik megalapozója.

tartományból, akkor az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor egyenletesen és abszolút konvergens a D tartományban.

Példa. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^3 x + p)}{n^2}$ sor egyenletesen konvergens, mert tagjainak abszolút értéke felülről behatárolható egy konvergens numerikus sor tagjaival:

$$\left| \frac{\sin(n^3 x + p)}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}, \text{ és a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ sor konvergens.}$$

Az egyenletesen konvergens függvénysorok két fontos tulajdonságából vezethetők le a műszaki alkalmazásokban gyakran szereplő Taylor és Fouriér függvénysorok. Ezek a tulajdonságok a tagonkénti differenciálhatóság és integrálhatóság.

Ha az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens a $D = [a,b]$ tartományban, és az $f(x)$ függvényhez konvergál, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

azaz a sor tagjai tagonként integrálva és összegezve is az $\int_a^b f(x)dx$ integrált eredményezik.

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ az $x \in D, D = [a,b]$ tartományban, azaz :

- az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pontonként konvergál az $f(x)$ értékekhez, továbbá

- az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$ konvergencia a D tartományban egyenletes konvergencia (azaz az eredeti $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor tagjai tagonként deriválható és az így kapott függvénysor egyenletesen konvergál a $g(x)$ függvényhez), akkor az $f(x)$ függvény is deriválható, és igaz az $f'(x) = g(x)$ egyenlőség.

Ez utóbbi egyenlőség azt jelenti, hogy az adott feltételek mellett, ha $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$, azaz a függvénysor tagjait tagonként deriválva és összegezve a határfüggvény deriváltját kapjuk.

1.3.2 Hatványsorok

A függvénysorok fontos osztályát képezik az

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

alakú sorok, amelyeket az x_0 pont körüli hatványsornak nevezünk ($a_n \in \Re$ valós együttható).

A hatványsor konvergenciájának megállapítására az x pontban használhatjuk bármely numerikus sorokra vonatkozó konvergencia-kritériumot. Vizsgáljunk abszolút konvergenciát, hiszen ha ezt bizonyítottuk, a konvergencia is fennáll.

Vizsgáljuk meg például a hányados-kritériummal, mely x helyettesítési értékekre lesz a hatványsorból nyert numerikus sor konvergens. A feltétel alapján:

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| < 1$ kell legyen. Ebből következik, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0| < 1 \Rightarrow$$

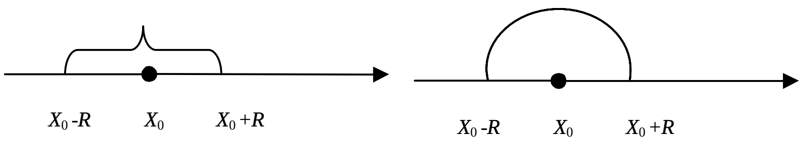
$$|x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow |x-x_0| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Jelöljük az $\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ kifejezést *R*-rel, hiszen ha felrajzoljuk azoknak az *x* változóknak az intervallumot, amelyekre a konvergencia feltételei teljesülnek, akkor a levezetés alapján láthatjuk, hogy

$|x-x_0| < R \Rightarrow < -R < x-x_0 < R \Rightarrow x_0 - R < x < x_0 + R$, azaz

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

tekinthető a konvergencia sugarának (mint ahogyan azt az ábra is mutatja).



Ha a gyök-kritériummal számolunk, akkor a feltétel alapján:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1$ kell legyen. Ebből következik, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty}|x-x_0|\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow$$

$$|x-x_0|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow |x-x_0| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

és a konvergencia sugara: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

A konvergencia-tartomány tehát az x_0 pont $(x_0 - R, x_0 + R)$ nyitott, szimmetrikus környezetének tekinthető.

Bizonyítható, hogy *a hatványsorok a konvergencia-tartományban egyenletesen konvergensek.*

Az egyenletes konvergenciára vonatkozó tételek alapján szükségünk lehet zárt konvergencia-tartományra, ezért gyakran külön megvizsgáljuk a nyitott környezet $\underline{x} = x_0 - R, \overline{x} = x_0 + R$ végpontjaiban a konvergenciát, hogy kiderüljön, biztosítható-e az egyenletes konvergencia az $[x_0 - R, x_0 + R]$ zárt intervallumban is.

Ha a végpontokban a konvergencia nem bizonyítható, akkor is fennáll az egyenletes konvergencia minden $[a,b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ intervallumra.

Ha R=0, akkor a konvergencia csak egyetlen pontban (az x_0 pontban) igaz.

Ha R=∞, akkor a konvergencia a teljes valós számhalmazon igaz.

Példa.

1. Határozzuk meg a következő sor konvergencia-tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n-1}\right)^n (x-1)^n .$$

A megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n (x-x_0)^n} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{n-1}\right)^n (x-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{n-1}\right)|x-1| = |x-1|\cdot 3 < 1 \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{3}$$

$|x-1| < \dfrac{1}{3} \Rightarrow -\dfrac{1}{3} < x-1 < \dfrac{1}{3} \Rightarrow -\dfrac{1}{3}+1 < x < \dfrac{1}{3}+1 \Rightarrow \dfrac{2}{3} < x < \dfrac{5}{3}$, a konvergencia sugara $\dfrac{1}{3}$, a nyitott konvergencia-tartomány $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

Vizsgáljuk ki a konvergenciát a végpontokban!

$$x=\frac{2}{3}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n-1}\right)^{n}(x-1)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n-1}\right)^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}(-1)^{n}$$

A sor általános tagjának abszolút értéke (így a tag sem) tart nullához:

$$\left|\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}(-1)^{n}\right|=\left|\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\right|,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=e$$

ezért ha $x=\frac{2}{3}\Rightarrow$ a sor divergens. Hasonlóképpen bizonyítható a divergencia a tartomány másik végpontjában, $x=\frac{5}{3}$-ban. Ezért az egyenletes konvergencia csak az $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$ intervallum zárt részhalmazán igaz.

2. Határozzuk meg a következő sor konvergencia-tartományának sugarát $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}x^n$.

A példában $x_0=0$, azaz a sort a 0 pont környezetében vizsgáljuk.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}x^n}<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)|x|<1\Rightarrow|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)<1\Rightarrow$$

$$|x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$\Rightarrow|x|<\frac{1}{1}\Rightarrow R=1$$

1.4 Taylor sor[9]

Az $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hatványsor polinom függvénynek is tekinthető, és mint ilyen akárhányszor deriválható. A konvergencia-tartományán belül egyenletesen konvergens, vagyis létezik olyan $f(x)$ függvény, amelyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x).$$

Mindezt figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy a hatványsor a konvergencia-tartomány egy zárt D részintervallumában eleget tesz az egyenletesen konvergens sor tagonkénti deriválására vonatkozó tétel feltételeinek, tehát ha $x \in D$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n (x - x_0)^n \right)' = f'(x) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n (x - x_0)^n \right)' = \left(a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + a_4 (x - x_0)^4 + \ldots \right)' = f'(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$a_1 + 2a_2 (x - x_0) + 3a_3 (x - x_0)^2 + 4a_3 (x - x_0)^3 + \ldots = f'(x)$$

Helyettesítsünk a következőképpen: $x = x_0$:

$$a_1 = f'(x_0).$$

Az $a_1 + 2a_2 (x - x_0) + 3a_3 (x - x_0)^2 + 4a_3 (x - x_0)^3 + \ldots$ összegben továbbra is fennállnak a tagonkénti deriválhatóság feltételei, és ha léteznek az $f(x)$ függvénynek magasabb rendű deriváltjai, akkor:

---

[9] **Taylor, Brook,** (1685–1731) Angol matematikus, munkásságát az analízisben fejtette ki. 1715-ben írt munkájában szerepelnek a róla elnevezett Taylor-sorok.

$$\left(a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+4a_3(x-x_0)^3+\ldots\right)'=\left(f'(x)\right)'\Rightarrow$$

$$2a_2+3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0)^1+4\cdot 3\cdot a_3(x-x_0)^2+\ldots=f''(x)$$

Helyettesítsünk a következőképpen: $x=x_0$:

$$2a_2=f''(x_0)\Rightarrow a_2=\frac{f''(x_0)}{2}.$$

A következő lépésben:

$$\left(2a_2+3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0)^1+4\cdot 3\cdot a_3(x-x_0)^2+\ldots\right)'=\left(f''(x)\right)'\Rightarrow$$

$3\cdot 2\cdot a_3+4\cdot 3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0)^1+\ldots=f'''(x)$, és ha $x=x_0$,

$$3\cdot 2\cdot a_3=f'''(x_0)\Rightarrow a_3=\frac{f'''(x_0)}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Az egymást követő lépésekben megfigyelhető a következő szabály (a helyessége indukcióval bizonyítható):

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\quad n=0,1,2,3,\ldots$$

Kiszámítottuk tehát az adott feltételek mellett a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor együtthatóit, és elmondhatjuk, hogy ha $x\in D$, akkor

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

az $f(x)$ függvényt tehát „sorba fejtettük $(x-x_0)$ hatványai szerint (vagy

x_0 környezetében), $f(x)$ derivált-függvényei segítségével. Az ilyen alakú hatványsort Taylor sornak nevezzük.

Ha a sorba fejtést csak az *n*-dik hatványig végezzük, akkor

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_n(x)} + R_n(x)$$

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

ahol az $R_n(x)$ sormaradékot az *x* pontban a korábbiakban a numerikus sorok maradékára adott becslés alapján így számíthatjuk:

$$R_n(x) \le \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| .$$

Ha $x_0 = 0$, akkor a Taylor sor

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

alakú, és Maclaurin[10] sor a neve.

Példa

1. A leggyakrabban alkalmazott Maclaurin sort az $f(x) = e^x$ függvény sorbafejtésével kapjuk.
   Tudjuk, hogy $x_0 = 0$. Lássuk az együtthatókat:
   $$a_0 = f(x_0) = e^0 = 1$$
   $$a_1 = f'(x_0) = \left(e^x\right)'\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = 1$$

---

[10] **Colin Maclaurin** (1698. február – 1746. június 14.), skót matematikus

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} = \left(e^x\right)''\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = 1$$

…

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \left(e^x\right)^{(n)}\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = 1$$

…

$$\Rightarrow\ e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

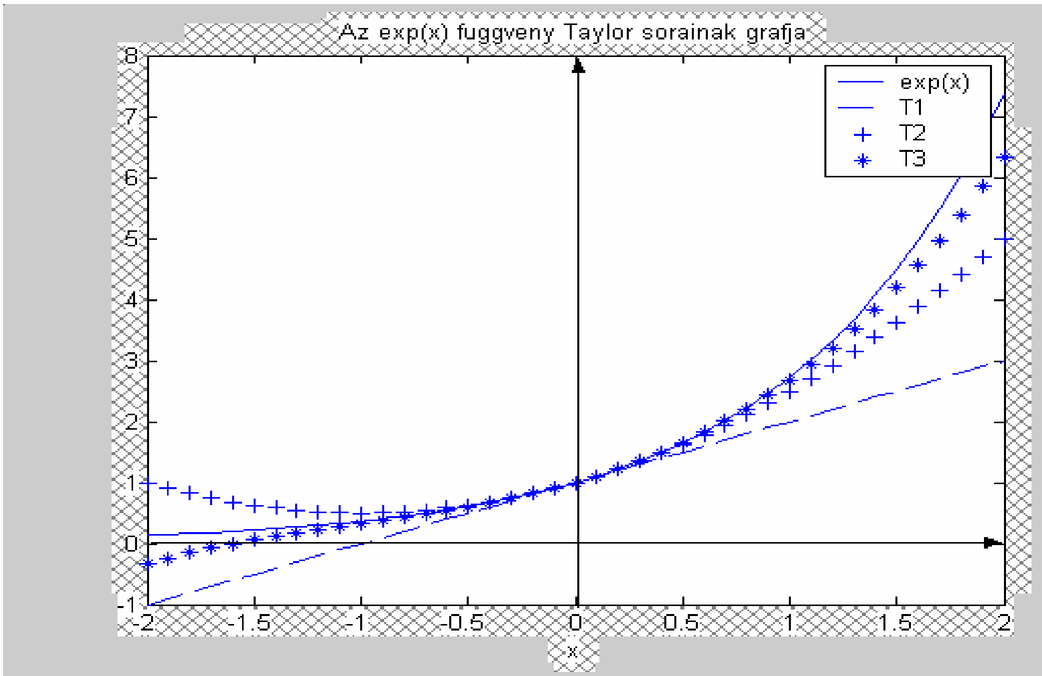
$$\Rightarrow e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

Rajzoljuk fel a $T_1(x) = 1 + \frac{1}{1!}x$, $T_2(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 \ldots$ közelítő Taylor (Maclaurin) polinomokat!

Megfigyelhetjük, hogy a kifejtés pontjának szűkebb környezetében (itt az $x_0 = 0$ pontban) a közelítő Taylor polinomok jobban símulnak az eredeti $f(x) = e^x$ függvényhez, mint a kifejtési ponttól távolabb eső pontokban.

Azt is megfigyelhetjük, hogy a magasabb hatványfokú Taylor polinomok jobban közelítik az $f(x) = e^x$ függvényt, ami érthető is, hiszen a hatvány (illetve *n*) növekedésével csökken a sormaradék, azaz az

$|f(x) - T_n(x)| = |e^x - T_n| = R_n(x)$ különbség egyre kisebb lesz.


Az exp(x) fuggveny Taylor sorainak grafja
exp(x)
T1
T2
T3
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x

1.5 Fourier[11] sor

A Fourier[12] sor a műszaki alkalmazásokban gyakran előforduló, szakadásos vagy lépcsős periodikus függvényeket közelíti egy folytonos ugyancsak periodikus függvénnyel. A periodikus tulajdonságot a Fourier sor két típusú, egymástól lineárisan független, összeadandó-sorozata biztosítja: a szinuszos és a koszinuszos tagok sorozata. Ezek lineáris kombinációjával leírhatóak más periodikus függvények.

Hasonló jelenséggel találkozunk a vektorterek esetében, ahol két lineáris független (általában merőleges, *ortogonális* $\vec{i}$ és $\vec{j}$) vektor lineáris kombinációjával adjuk meg a kétdimenziós vektortér összes többi vektorát: $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$. A vektorokat tehát a lineárisan független vektorok (a tér bázisvektorai) és azok (skaláris) együtthatói határozzák meg.

Ha a periodikus függvények terét vizsgáljuk, akkor várhatóan meghatározhatók azok a feltételek, amelyek mellett egy periodikus függvényt felírhatunk szinusz és koszinusz bázis-függvények lineáris kombinációjaként. A bázisfüggvények tulajdonságait az ortogonális függvények elmélete írja le.

1.5.1 Ortogonális függvények és függvény sorok

A legismertebb ortogonális függvény rendszer az un. trigonometrikus rendszer:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos 3x,\ \sin 3x, \ldots\ldots, \cos nx,\ \sin nx, \ldots\ldots$$

A periódus alapintervalluma bármely $2p$ hosszúságú intervallum lehet, például ($-p$,$+p$) vagy (0, $2p$), tekintettel a függvények $2p$ hosszúságú periódusára.

Ortogonálisnak nevezzük a függvény-rendszert akkor, ha tetszés szerinti két elemét összeszorozva és ezt a szorzat függvényt egy $2p$ hosszúságú intervallumon integrálva nullát kapunk eredményül.

Legyen a függvényrendszer két eleme:

---

[11] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 –1830), francia matematikus és fizikus.

$$j_n \quad \textit{és} \quad j_m$$

$$\int_0^{2p} j_n j_m dx = \int_{-p}^{p} j_n j_m dx = \int_a^{a+2p} j_n j_m dx = 0, \quad ha \ n \neq m$$

Az ortogonalitás (merőlegesség) analógiát mutat a merőleges vektorok skaláris szorzatával. A két nem nulla vektor szorzata akkor és csak akkor nulla, ha azok merőlegesek.

Ha a j_n ortogonális rendszer, akkor elemeinek valamely konstans együtthatós lineáris kombinációját

$$C_1 j_n + C_2 j_m + ...$$

ortogonális sornak nevezzük.

Az egyszerű trigonometrikus rendszer azonban nem normált (ami a vektoroknál az egységnyi hosszúságot jelenti), mert:

$$\int_{-p}^{p} 1 \cdot dx = 2p, \ \int_{-p}^{p} \cos^2 nx \cdot dx = \int_{-p}^{p} \sin^2 nx \cdot dx = p, \qquad n = 1,2,....$$

A megfelelő normált rendszer:

$$\frac{1}{\sqrt{2p}}, \frac{\cos 1x}{\sqrt{p}}, \frac{\sin x}{\sqrt{p}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{p}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{p}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{p}}, \frac{\sin 3x}{\sqrt{p}}, ... \frac{\cos nx}{\sqrt{p}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{p}}, ...$$

1.5.2 A Fourier sor trigonometrikus alakja

Fourier bizonyította, hogy minden $f(t) = f(t \pm T)$ periodikus függvény előállítható a T-hez tartozó $\frac{1}{T}$ frekvencia (vagy az $w = \frac{2p}{T}$ körfrekvencia) úgynevezett alap-harmonikus, egész-számú többszöröseinek lineáris kombinációjaként (szuperpozíciójaként). Az ilyen módon történő függvény-előállítást Fourier sornak nevezzük.

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \\ &a_1 \cos wt + a_2 \cos 2wt + a_3 \cos 3wt + ... \\ &+ b_1 \sin wt + b_2 \sin 2wt + b_2 \sin 2wt + ... = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kwt + b_k \sin kwt \right). \end{aligned}$$

Hogyan kapcsolódik mindez ahhoz, amit eddig a függvénysorokról megtanultunk? Ha feltételezzük, hogy a fenti egyenlőségben a sor és az $f(x)$ függvény eleget tesz a sor tagonkénti integrálásához kapcsolódó tétel feltételeinek, akkor bizonyos integrálásokkal eljuthatunk a fenti szuperpozíciós kifejtés együtthatóihoz.
Az adott függvényre a feltételek a következők:

Ha az $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) =. \; a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens a $D = [a,b] = [-p, p]$ tartományban (ami most szükséges feltételként egy periódus hosszúságú), és az $f(x)$ függvényhez konvergál, azaz

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

akkor

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = \int_{-p}^{p}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)dx = \int_{-p}^{p} a_0 dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-p}^{p} f_k(x)dx \,,$$

azaz a sor tagjai tagonként integrálva és összegezve is az $\int_{-p}^{p} f(x)dx$ integrált eredményezik.

Tegyük fel, hogy a feltételek teljesülnek, és folytassuk a számítást:

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = \int_{-p}^{p}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)dx =$$

$$\int_{-p}^{p}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right)dx = \int_{-p}^{p} a_0 dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-p}^{p}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)dx =$$

$$= a_0 \int_{-p}^{p} dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-p}^{p} \cos kx dx + b_k \int_{-p}^{p} \sin kx dx\right)$$

A fenti kifejezésben:

$$a_0 \int_{-p}^{p} dx = a_0 \cdot x\Big|_{-p}^{p} = a_0 \cdot (p + p) = 2p \cdot a_0$$

$$\int_{-p}^{p} \cos kxdx = \frac{\cos kx}{k}\bigg|_{-p}^{p} = \frac{1}{k}\left(\sin kp - \sin k(-p)\right) = 0$$

(mert $\sin kp = 0$ minden k egész számra).

$$\int_{-p}^{p} \sin kxdx = -\frac{\cos kx}{k}\bigg|_{-p}^{p} = -\frac{1}{k}\left(\cos kp - \cos k(-p)\right) =$$

(a koszinusz függvény párossága miatt)

$$\frac{1}{k}\left(\cos kp - \cos k(p)\right) = 0$$

Ebből következik, hogy

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = a_0 \int_{-p}^{p} dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-p}^{p} \cos kxdx + b_k \int_{-p}^{p} \sin kxdx \right) = a_0 \cdot 2p \Rightarrow$$

$$a_0 = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(x)dx$$

Számítsuk ki a folytatásban az a_k és b_k együtthatókat!

Szorozzuk meg az

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

egyenlőséget $(\cos nx)$-szel!

$$f(x) \cdot \cos nx = a_0 \cdot \cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx \cdot \cos nx + b_k \sin kx \cdot \cos nx\right),$$

és, tekintettel arra, hogy a tagonkénti integrálás feltételi még mindig fennállnak, integráljuk az egyenlet mindkét oldalát a teljes perióduson!

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx =$$

$$\int_{-p}^{p} a_0\cdot\cos nx\cdot dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-p}^{p}\cos kx\cdot\cos nx\cdot dx + b_k\int_{-p}^{p}\sin kx\cdot\cos nx\cdot dx\right)$$

Az előző levezetésben láttuk, hogy $\int_{-p}^{p} a_0\cdot\cos nx\cdot dx = \grave{}0$

Trigonometrikus egyenlőségek alapján:

$$\cos kx\cdot\cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(kx+nx)+\cos(kx-nx)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\right)=\frac{1}{2}\begin{cases}\cos(2n)x+\cos 0 & ha \quad k=n\\ \cos(k+n)x+\cos(k-n)x & ha \quad k\neq n\end{cases}$$

$$\sin kx\cdot\cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(kx+nx)+\sin(kx-nx)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin(k+n)x+\sin(k-n)x\right)=\frac{1}{2}\begin{cases}\sin(2n)x+\sin 0 & ha \quad k=n\\ \sin(k+n)x+\sin(k-n)x & ha \quad k\neq n\end{cases}$$

Legyen $k+n=p$, $k-n=q$, és $p,q\in$ Z, azaz egész szám.

Helyettesítés után, az integráláskor a $\cos(k+n)x=\cos px$, $\cos(k-n)x=\cos qx$, $\cos(2n)x$, $\sin(k+n)x$, $\sin(k-n)x$, $\sin(2n)x$, függvények integrálja, éppúgy, mint az előző lépésben, nullával lesz egyenlő a teljes periódus felett. Csak az a tag lesz éremlegesen tárgyalható a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_k\int_{-p}^{p}\left(\cos(k+n)x+\cos(k-n)x\right)\cdot dx + b_k\int_{-p}^{p}\left(\sin(k+n)x+\sin(k-n)x\right)\cdot dx\right)$$

összegben, ahol $k=n$. Azaz, ha például az 5. együtthatót keressük, akkor cos5*x*-szel szorzunk, és a helyettesítés után csak az 5. együttható melletti kifejezés kerül integrálásra. Az összes többi összeadandó függvény integrálja nulla lesz.

Tehát:

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cdot \cos nx \cdot dx = \frac{1}{2}\left(a_n \int_{-p}^{p} (\cos 2nx + \cos 0)\cdot dx + b_n \int_{-p}^{p} (\sin 2nx + 0)\cdot dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_n \underbrace{\int_{-p}^{p} \cos 2nx \cdot dx}_{=0} + a_n \int_{-p}^{p} 1dx + b_n \underbrace{\int_{-p}^{p} (\sin 2nx)\cdot dx}_{=0} \right) = \frac{1}{2} a_n \int_{-p}^{p} 1dx = \frac{2p}{2} a_n = p a_n$$

$$\Rightarrow \int_{-p}^{p} f(x)\cdot \cos nx \cdot dx = p a_n \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\cdot \cos nx \cdot dx$$

Ha az

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

egyenlőséget $(\sin nx)$-szel szorozzuk, akkor hasonló eljárással azt kapjuk, hogy:

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\cdot \sin nx \cdot dx$$

Foglaljuk tehát össze: ha az $f(x)$ függvény periódusos, integrálható a teljes periódus felett, akkor létezik olyan hozzá egyenletesen konvergáló

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

függvénysor, amelyben az együtthatók rendre:

$a_0 = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\cdot \cos kx \cdot dx$, $b_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\cdot \sin kx \cdot dx$.

1.5.3 Fourier sorok tulajdonságai

1. Az együtthatókat meghatározhatjuk bármely $[t, t+2p]$ intervallumon történő integrálással.

2. a) Ha az $f(x)$ függvény páros (azaz $f(-x)=f(x)$), akkor nincs szükség a páratlan komponensre (harmonkusra), hogy a függvényt sorba fejtsük. Ez azt jelenti, hogy a páros $f(x)$ függvény sorba fejtésében csak páros komponensek, azaz koszinusz-komponensek szerepelnek:

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx),$$

mert a $b_k=\dfrac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cdot \sin kx \cdot dx$ együttható nulla, $b_k=0$. Mindezt számítással is ellenőrizhetjük.

b) Ha az $f(x)$ függvény páratlan (azaz $f(-x)=-f(x)$), akkor nincs szükség a páros komponensre (harmonkusra), hogy a függvényt sorba fejtsük. Ez azt jelenti, hogy a páratlan $f(x)$ függvény sorba fejtésében csak páratlan komponensek, azaz szinusz-komponensek szerepelnek:

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(b_k \sin kx),$$

mert az $a_k=\dfrac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cdot \cos kx \cdot dx$ együttható nulla, $a_k=0$.

3. Ha az $f(x)$ függvény peridusos, de a periódusa nem $2p$, akkor elvégezhetünk a változón egy olyan transzformációt (átalakítást), amely után a kapott függvény az új transzformált változóval már eleget tesz az eredeti Fourier sorba való fejtés feltételeinek.
A következőképpen járunk el:
Legyen az $f(x)$ függvény periódusos, a periódus hossza legyen 2*l*, azaz $f(x+k\cdot 2l)=f(x)$.

Vezessünk be egy új változót: $t = \frac{xp}{l}$, (az eredeti x-re vonatkozó periódust leosztottuk a periódus hosszával, $2l$-lel, hogy egységnyit kapjunk, majd beszoroztuk $2p$ -vel, hogy az újonnan bevezetett t változóra vonatkozó periódus már a feltételhez szükséges $2p$ legyen.)
A sorba fejtés továbbra is az

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{kpx}{l} + b_k \sin \frac{kpx}{l} \right)$$

egyenlőség alapján történik, de az együtthatók magukban hordozzák a változó-transzformációt:

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos \frac{kpx}{l} \cdot dx$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin \frac{kpx}{l} \cdot dx .$$

4. Megfigyelhetjük, hogy

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + R_n(x),$$

azaz az $f(x)$ függvény közelítő felírásához felhasználhatunk véges sok összeadandót is, de ha csak az n-dik tagig írjuk fel az összeget, akkor számolnunk kell az $R_n(x)$ sormaradékkal.

Mindenképpen megfigyelhető itt is, mint a Taylor sornál, hogy ha több összeadandóval írjuk fel a függvény Fourier sorát, az jobban simul az eredeti függvényhez.

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

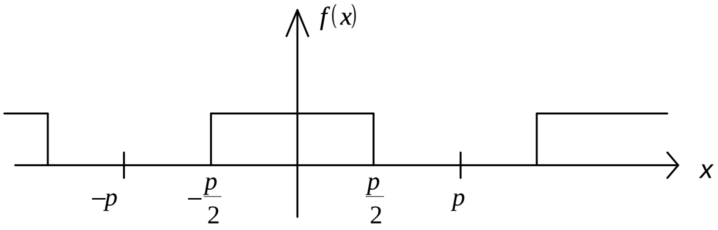
1.5.4 Példák: a Fourier sorok

1.példa, páros függvényre.

Legyen $f(x)$ egy, az O*y* tengelyre szimmetrikus impulzus függvény (azaz páros):

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} 0 \ \ ha \ \ -p \le x < -\frac{p}{2} \\ 1 \ \ ha \ \ -\frac{p}{2} < x < \frac{p}{2} \\ 0 \ \ ha \ \ \frac{p}{2} < x \le p \\ \frac{1}{2} \ \ ha \ \ x = \pm\frac{p}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Rajzoljuk fel a függvényt!



Az $f(x)$ páros mert az $f(-x)=f(x)$, így csak a páros koszinusz komponensek a_n együtthatóját kell kiszámítani:

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx=\frac{1}{p}\left(\int_{-p}^{-\frac{p}{2}} 0dx+\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} 1dx+\int_{\frac{p}{2}}^{p} 0dx\right)=\frac{1}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} 1dx=1$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} 1\cdot\cos nx\cdot dx=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\cos nx\cdot dx=\frac{1}{np}[\sin nx]_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}=$$

$$=\begin{cases} 0 & ha \quad n=2k,\ páros \\ (-1)^k\frac{2}{np} & ha \quad n=2k+1,\ páratlan \end{cases}$$

Ebből:

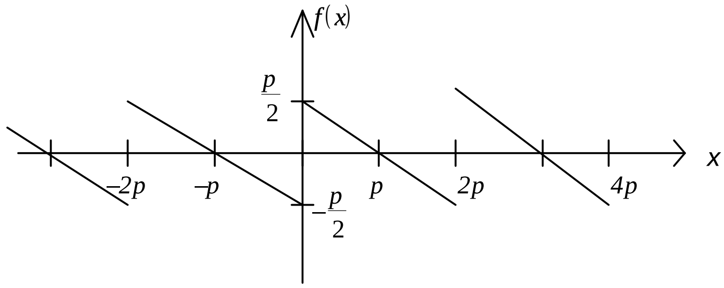
$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{p}\left(\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\frac{\cos 7x}{7}+-....\right)$$

2.példa, páratlan függvényre.

Legyen:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad x = 0 \\ \dfrac{p - x}{2} & ha \quad 0 < x < 2p \end{cases},$$

és legyen $f(x) = f(x \pm k2p)$.



Mivel a függvény páratlan, Fourier sora szinuszos tagokból fog állni. Ezért:

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin nx \cdot dx = \frac{1}{p}\int_0^{2p} \frac{p - x}{2}\sin nx \cdot dx =$$

$$\frac{1}{2p}\left(\underbrace{\int_0^{2p} p \sin nx \cdot dx}_{=0} - \int_0^{2p} x \sin nx \cdot dx \right) =$$

$$\frac{-1}{2p}\int_0^{2p} x \sin nx \cdot dx =$$

Az integrálásnál alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát.

$$\left| \begin{matrix} u = x & \int \sin nx dx = dv \\ du = dx & \dfrac{-\cos nx}{n} = v \end{matrix} \right| =$$

$$\frac{-1}{2p}\int_0^{2p} x \sin nx \cdot dx = \frac{-1}{2p}\left(\left. \frac{-x\cos nx}{n} \right|_0^{2p} - \int_0^{2p} \frac{-\cos nx}{n} \cdot dx \right) =$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cdot \sin nx dx = \frac{1}{p}\int_0^{2p} \frac{p-x}{2}\cdot \sin nx dx = \frac{1}{p}\left[\frac{p-x}{2}\cdot\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{2p} = -\frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{1}{2}\frac{\cos nx}{n}dx =$$

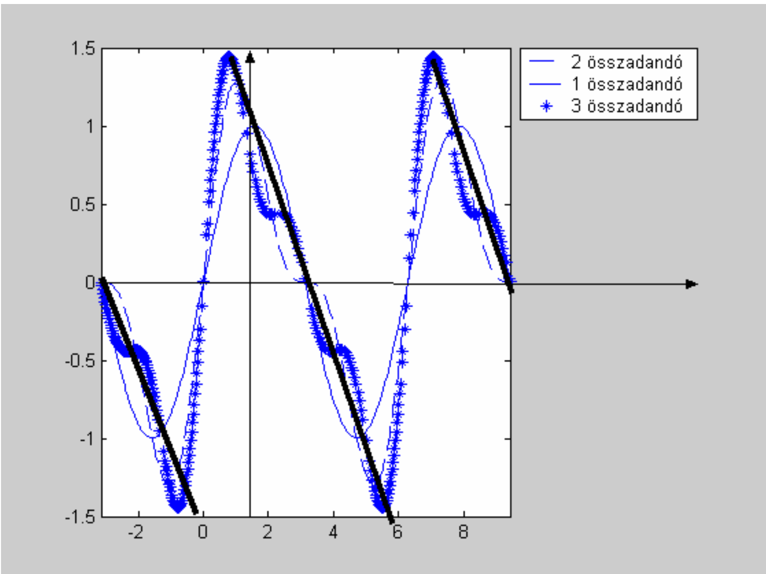
$$\frac{1}{p}\left(\frac{p}{2n}+\frac{p}{2n}\right)-\frac{1}{2np}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2p} = \frac{1}{n}$$

Az integrálásnál alkalmaztuk a parciális integrálás szabályát.

Azt írhatjuk tehát, hogy:

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots = \sum_{k=}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$$

Rajzoljuk fel a különböző számú összeadandóval felírt Fourier sorokat és a függvényt.



2 Közelítő számítások

2.1 Hibaszámítás

A gyakorlati életben gyakran nem tudjuk a számításokban szereplő számok pontos értékét felírni. Ennek oka lehet például a mérőműszerünk előlátott pontatlansága, ahol eleve adott, hogy a mért adat milyen hibaszázalékkal vehető figyelembe. Egy másik lehetséges ok, hogy a számítógépben a számértékek tárolására csak véges regiszter-kapacitás áll rendelkezésünkre, így a nulla környezetében levő számokat és a nagy abszolút értékű pozitív vagy negatív számokat még lebegőpontos ábrázolási módban sem tárolhatjuk.
A számítógépek a számokat véges pontossággal, általában lebegőpontos alakban tárolják. A véges pontosság azt jelenti, hogy az aritmetikai műveletek eredményeként kapott érték nem egyezik meg a művelet egzakt értelemben vett eredményével, hanem csak megközelíti azt.

Ha egy x^* számot közelítő értékével. x-szel ábrázolunk, akkor ennek az ábrázolásnak az abszolút hibája (a pontos és a közelítő érték eltérése)

$$\Delta x = \left| x^* - x \right|$$

Az abszolút hiba a pontos érték ismeretének hiányában gyakran csak becsülhető. Ilyenkor mindig felső becslést adunk (azaz pesszimista módon a lehető legnagyobb hibát feltételezzük).

Gyakran mondjuk, hogy az x^* szám hibahatára $\Delta x = \left| x^* - x \right|$, azaz

$$x = x^* \pm \Delta x$$

Az abszolút hiba nem jellemzi teljes mértékben a pontos és közelítő érték közötti eltérést, hiszen 100 és 99, valamint 1000000 és 999999 között is 1 az eltérés, mégis nagyobb hibát érzékelünk a 100 és a 99 közötti eltérésben. Ezért a hiba és a pontos (vagy közelítő érték) hányadosával megadhatjuk a hiba nagyságrendjét.
Az x közelítő érték relatív hibája

$$dx = \frac{\Delta x}{x*}$$

Megjegyzés: Ha a pontos érték nem áll rendelkezésünkre, akkor a relatív hiba kiszámítható a

$$dx = \frac{\Delta x}{x}$$

képlettel is.

Értékes és biztos számjegyek. A kerekítés hibája

A számítógépek a valós számokat véges pontossággal, általában lebegőpontos alakban tárolják. A véges pontosság azt jelenti, hogy az aritmetikai műveletek eredményeként kapott érték nem egyezik meg a művelet pontos eredményével, hanem csak megközelíti azt. Ha egy számítógép a tízes számrendszert használja, és a számokat 8 tizedes jegy pontossággal tárolja, akkor az 1/3 művelet eredménye 0.33333333 lesz, ami több mint $3*10^{-9}$-nel tér el a valódi értéktől.

Általában, ha a számot ***p***-dik tizedes jegyére kerekítjük[13], akkor a közelítő (kerekített) számérték és a pontos érték közötti különbség legfeljebb fele az utolsó meghagyott számjegy helyi értékének, azaz

$$\Delta x = \left| x^* - x \right| \leq 0.5 \cdot 10^{-p}.$$

Példa. Legyen például $x^* = \frac{1}{6} = 0{,}16666...$, $x = 0{,}167$. Az utolsó meghagyott számjegy helyi értéke 10^{-3}.

$$\Delta x = \left| x^* - x \right| = \left| 0{,}16666... - 0{,}167 \right| \leq 0{,}0005 \leq 0.5 \cdot 10^{-3}.$$

2. példa. Kerekítsük az $x^* = 1{,}999$ számot két tizedes pontosságra! A közelítő érték $x = 2{,}00$, $\Delta x = \left| x^* - x \right| \leq \left| 1{,}999 - 2{,}00 \right| = 0{,}001 < 0{,}005 < 0.5 \cdot 10^{-2}$. Az utolsó két 0 számjegyet nem hagyhatjuk el, hiszen ezzel utalunk arra, hogy milyen pontossággal ábrázoltuk az $x^* = 1{,}999$ számot.

Egy tízes számrendszerben felírt szám értékes jegyeinek nevezzük azokat a számjegyeket, amelyek nem nulla értékűek, valamint azokat a nulla számjegyeket,

[13] Emlékeztető: a kerekítési szabályokat még az általános iskolában megismertük.

amelyek értékes jegyek között vannak. Értékes az a nulla számjegy is, amely a számban a számjegysorozat végén a szám pontosságát (a biztos számjegyet) hivatott ábrázolni.

Alapértelmezés szerint egy számérték utolsó kiírt számjegye szignifikáns számjegy, azaz biztos számjegy.

Aritmetikai műveletek és függvények hibája (hibahatárai)

Az elemi aritmetikai műveleteket figyelembe véve megállapítható, hogy a közelítő számok összegének abszolút hibája nem haladja meg a számok abszolút hibáinak összegét, azaz

$\Delta\left(\sum x_i\right) \le \sum \Delta x_i$,

és közelítő számok különbségének abszolút hibája nem haladja meg a két szám abszolút hibáinak összegét, azaz

$\Delta\left(x_1 - x_{\backslash 2}\right) \le \Delta x_1 + \Delta x_1$.

További elemi aritmetikai műveleteket vizsgálva, azt tapasztaljuk, hogy a közelítő számok szorzatának relatív hibája nem haladja meg a számok relatív hibáinak összegét, két szám hányadosának relatív hibája nem haladja meg a számok relatív hibáinak összegét, valamint egy szám *m*-edik hatványának relatív hibája a szám relatív hibája az *m*-ediken.

Az egyszerű algebrai függvények közelítő hibahatáraira közelítő változóértékek esetében a fenti szabályok alapján adhatunk becslést. Példákon mutatunk be néhány egyszerű módszert.

Példa. Legyen adott az $f\left(x_1, x_2\right) = \dfrac{{x_1}^2 + 1}{x_1 + x_2}$ algebrai függvény, és legyenek adottak az x_1 és x_2 változóértékek közelítő értékei hibahatáraikkal:

$x_1 = 1{,}13 \pm 0{,}005$, $x_1 = 2{,}74 \pm 0{,}005$, azaz $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0{,}005$,

$dx_1 = \dfrac{\Delta x_1}{x_1} = \dfrac{0{,}005}{1{,}13} = 0{,}0044 < 0{,}01$ tehát a hibahatár 1 század, azaz 1%.

Használhatjuk a következő jelölést is:

$\overline{x_1} = x_1 + \Delta x_1 = 1.13 + 0.005 = 1.135$

$\underline{x_1} = x_1 - \Delta x_1 = 1.13 - 0.005 = 1.125$.

Hasonlóképpen:

$$dx_2 = \frac{\Delta x_2}{x_2} = \frac{0{,}005}{2{,}74} = 0{,}0018 < 0{,}01$$ tehát a hibahatár 1 század, azaz 1%,

$$\overline{x_2} = x_2 + \Delta x_2 = 2.74 + 0.005 = 2.745$$

$$\underline{x_2} = x_2 - \Delta x_2 = 2.74 - 0.005 = 2.735.$$

Lássuk, hogyan befolyásolják a változók hibahatárai a függvényérték hibahatárait!

Ha pontos értékkel számolunk:

$$f^*(x_1, x_2) = \frac{x_1^{\ 2} + 1}{x_1 + x_2} = \frac{1.13^2 + 1}{1.13 + 2.74} = 0.5883$$

Megjegyzés: Tekintettel a változók hibahatáraira, elegendő négy tizedessel számolnunk, hiszen a megadott változóértékek pontosságától nagyobb pontosságot nem érhetünk el.

Ha függvény felső hibahatárát számítjuk, akkor a változók pozitív értékére és a függvény alakjára való tekintettel akkor kapjuk a legnagyobb értéket, ha a számlálóban a változók lehető legnagyobb, a nevezőben pedig a változók lehető legkisebb értékét helyettesítjük:

$$\overline{f(x_1, x_2)} = \frac{\left(\overline{x_1}\right)^2 + 1}{\underline{x_1} + \underline{x_2}} = \frac{1.135^2 + 1}{1.125 + 2.735} = 0.5928$$

Ha függvény alsó hibahatárát számítjuk, akkor kapjuk a függvény lehető legkisebb értékét, ha a számlálóban a változók lehető legkisebb, a nevezőben pedig a változók lehető legnagyobb értékét helyettesítjük:

$$\underline{f(x_1, x_2)} = \frac{\left(\underline{x_1}\right)^2 + 1}{\overline{x_1} + \overline{x_2}} = \frac{1.125^2 + 1}{1.135 + 2.745} = 0.5839.$$

A függvény abszolút hibájának tekinthetjük a függvény pontos értéke és az alsó, illetve felső hibahatár közötti eltérés közül a nagyobbat:

$$\Delta f(x_1, x_2) = \max\left(\left|f^*(x_1, x_2) - \underline{f(x_1, x_2)}\right|, \left|f^*(x_1, x_2) - \overline{f(x_1, x_2)}\right|\right) =$$
$$\max\left(|0.5883 - 0.5839|, |0.5883 - 0.5928|\right) = \max(0.0044, 0.0045) = 0.0045$$

$$\Delta f(x_1, x_2) = 0.0045 < 0.005 = 0.5 \cdot 10^{-2},$$

azaz a függvényértéket is két tizedes pontosságúnak tekinthetjük, mint ahogyan a változóértékek is azok voltak. A kerekítést erre a tizedesre végezhetjük, és számolhatunk azzal, hogy a függvény közelítő értéke 0.59.

A relatív hiba:

$df(x_1, x_2) = \dfrac{\Delta f(x_1, x_2)}{f^*(x_1, x_2)} = \dfrac{0.0045}{0.5883} = 0.0076 < 0.01$, tehát marad 1%.

Példa. Legyen adott az $f(x) = \log_2(x^2 + 3)$ függvény.

a) Mekkorák a hibahatárai az $x = 1.00 \pm 0{,}005$ intervallumon?

b) Hogyan számítható ki a függvény értéke a változó ismert abszolút hibájának segítségével az 1,1 pontban?

Megoldás:

a) A függvény monoton növekvő, ezért az x változóértékek által megadott intervallumon a lehető legkisebb értéke az $\underline{x} = 1.00 - 0{,}005 = 0.995$ pontban lesz:

$\underline{f}(x) = \log_2(0{,}995^2 + 3) = 1{,}9964$,

A lehető legnagyobb értéke:

$\bar{f}(x) = \log_2(1{,}005^2 + 3) = 2{,}0036$.

A pontos értéke:

$f(x) = \log_2(1^2 + 3) = 2{,}0000$.

Abszolút hibája:

$\Delta f(x) = \max\left(\left|f(x) - \underline{f}(x)\right|, \left|f(x) - \overline{f}(x)\right|\right) =$

$\max(|2.0000 - 1.9964|, |2.0000 - 2.0036|) = 0.0036$

Relatív hibája:

$rf = \dfrac{0.0036}{2.0000} = 0.0018$.

b) Ha a függvény Taylor sorba történő fejtését vesszük figyelembe az $x_0 = 1$ pont környezetében, akkor

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+R_1 \Rightarrow f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

azaz

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot \Delta x$$

azaz

Számítsuk a deriváltakat:

$$f'(x)=\frac{1}{(x^2+3)\cdot \ln 2}\cdot 2x=\frac{2x}{(x^2+3)\cdot \ln 2}$$

$$f''(x)=\frac{2\cdot (x^2+3)\cdot \ln 2-2x\cdot 2x\cdot \ln 2}{((x^2+3)\cdot \ln 2)^2}=\frac{6-2x^2}{(x^2+3)^2\cdot \ln 2}$$

A szükséges helyettesítési értékek:

$$f(x_0)=f(1)=\log_2(1^2+3)=2$$

$$f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{(1^2+3)\cdot \ln 2}\cdot 2=\frac{1}{2\cdot \ln 2}=0.7213$$

$$f''(x_0)=f''(1)=\frac{6-2}{(1+3)^2\cdot \ln 2}=\frac{1}{4\cdot \ln 2}=0.3607$$

$$\Delta x=|1-1.1|=0.1$$

$$\Rightarrow f(1.1)\approx f(1)+f'(1)\cdot 0.1=2+0.0721=2.0721$$

A hiba kisebb az első elhagyott tagnál, azaz

$$R_1(x)<\left|\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\right| \Rightarrow R_1(x)<\left|\frac{f''(1)}{2!}\Delta x^2\right|=\left|\frac{0.3607}{2}\cdot 0.01\right|=0.001803<0.005$$

Az eredményt két tizedes pontossággal elfogadhatjuk, $f(1.1)\approx 2.07$.

2.2 Interpoláció

Mérjünk le egy függvényértéket a $t_0, t_1, \ldots t_n$ időpillanatokban. Ennek alapján, amennyiben a függvény a mért időpontok közti időben nem viselkedik „váratlan” módon, következtethetünk a mérések közötti időszakokban a köztes függvényértékekre.

Az interpolációs módszer olyan közelítő (numerikus) módszer, amely egy közelítő (általában polinom) függvény és az ismert *f*(*x*) függvényértékek segítségével az ismert mérési pontok közelében kiszámítja az ismeretlen függvényértékeket.

Legyenek adottak az $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbf{R}$ változóértékekre az $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots$ $f(x_n) \in \mathbf{R}$ függvényértékek. Az $(x_i, f(x_i))$, $(i = 1,2,\ldots n)$ pontokat az interpoláció pontjainak nevezzük. Olyan polinomot keresünk, amely áthalad az interpoláció pontjain. Bizonyítható, hogy ha az interpoláció pontjai különböznek, akkor létezik ilyen n-ed rendű $P_n(x)$ polinom, amelyre $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$.

A Lagrange[14]-féle interpolációs polinom tetszőleges pontközökkel megadott $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ változóértékekre és a hozzájuk tartozó $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots$

$f(x_n)$ függvényértékekre

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

alakú, és kielégíti az $L_n(x_i) = f(x_i)$ feltételt $(i = 1,2,\ldots n)$. Bármely $x \in [x_0, x_n]$ pontra bizonyíthatóan $L_n(x) \approx f(x)$, és a hibabecslés:

$$|L_n(x) - f(x)| = R_n < \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x),$$

ahol $f^{(n+1)}(x)$ a függvény $(n+1)$-ed rendű deriváltjának a lehető legnagyobb értéke az $[x_0, x_n]$ intervallumon úgy, hogy $x \in \{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$.

Belátható, hogy ha több megadott interpolációs pontunk van, akkor a hiba kisebb.

Természetesen a Lagrange-féle polinomot akkor használjuk, ha az $f(x)$ függvény analitikus alakját nem ismerjük, most mégis lássunk egy olyan példát, ahol a függvény is ismert, hogy a Lagrange polinom és a függvény egymáshoz való viszonyát bemutassuk.

Példa. Legyen adott az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény a (100,10), (121,11), (144,12) interpolációs pontokban. Ábrázoljuk a pontokat, a pontokhoz rendelhető $L_2(x)$

[14] **Lagrange, Joseph-Luis**, *gróf*, eredeti olasz nevén *Giuseppe Luigi Lagrangia* (szül. 1736. január 25., Torino – megh. 1813. április 10., Párizs). Olasz születésű francia matematikus.

másodrendű polinomot és az $f(x)=\sqrt{x}$ függvényt. Számítsuk ki ezután az $L_2(x)$ polinom segítségével a $\sqrt{119}$ közelítő értékét. Hasonlítsuk össze a közelítő értéket a pontos értékkel!

Foglaljuk táblázatba az interpolációs pontokat!

i	x_i	$f(x_i)=y_i$
0	100	10
1	121	11
2	144	12

Írjuk fel az interpolációs pontokon áthaladó $L_2(x)$ másodrendű polinomot:

$$L_2(x)=\sum_{i=0}^{2}\left(f(x_i)\cdot\prod_{\substack{k=0\\ i\neq k}}^{2}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)=$$

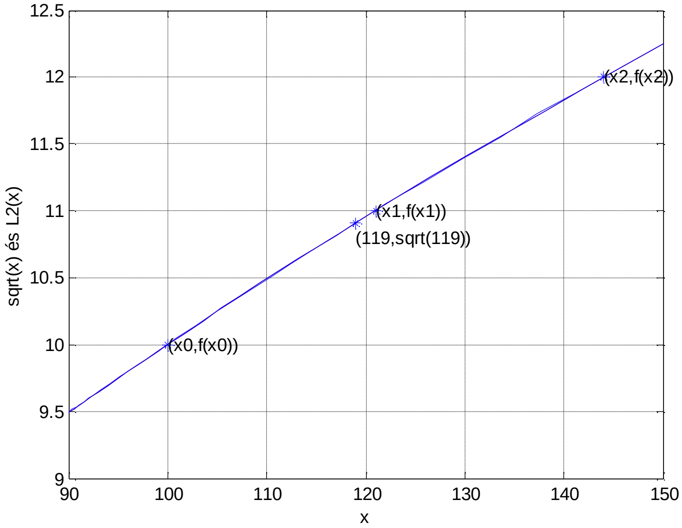
$$=f(x_0)\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_1)\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f(x_2)\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=10\cdot\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}+11\cdot\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}+12\cdot\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}$$

$$=10\cdot\frac{(x-121)(x-144)}{(-21)(-44)}+11\cdot\frac{(x-100)(x-144)}{21\cdot(-23)}+12\cdot\frac{(x-100)(x-121)}{44\cdot 23}$$

$$=\frac{-1}{10626}x^2+\frac{727}{10626}x+\frac{660}{161}$$

Az $L_2(x)$ polinom és az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény gráfja nem csak az interpolációs pontokban esik egybe, hanem ahogyan azt az ábra is mutatja, az $x\in[100{,}144]$ pontokban is szinte fedi egymást.



$L_2(119) = 10.9083$, $\sqrt{119} = 10.9087$, azaz a hibabecslés:

$\left|L_n(119) - \sqrt{119}\right| = |10.9083 - 10.9087| = 0.0004 < 0.0005 = 0.5 \cdot 10^{-3}$,

tehát a kapott közelítő eredmény három tizedes pontossággal elfogadható: $\sqrt{119} \approx 10.908$.

Példa. Adjunk meg egy függvényt négy interpolációs pontban. A négy pont lehetővé teszi a számunkra, hogy harmadfokú közelítő interpolációs polinomot írjunk fel. Adjuk meg a polinom együtthatóit, és mutassuk meg, hogyan lehet a MATLAB csomagban interpolációs polinomot megadni!

i	x_i	$f(x_i)=y_i$
0	0	1
1	2	4
2	3	2
3	5	0

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \left(f(x_i) \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^{3} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) =$$

$$= f(x_0)\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1)\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

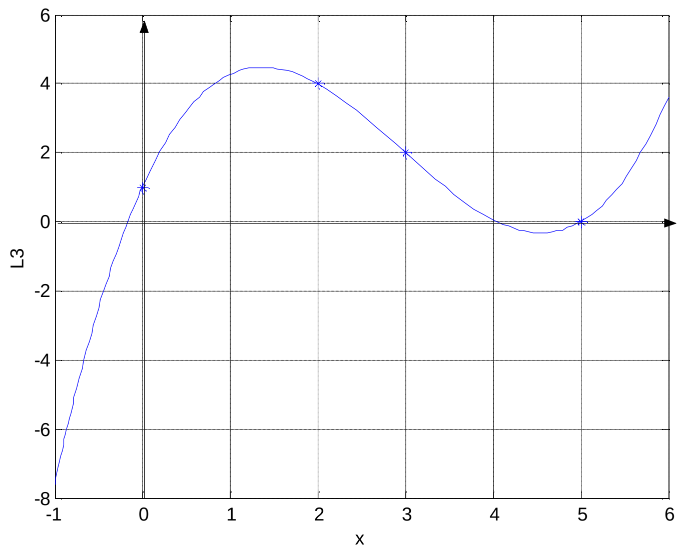
$$+ f(x_2)\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$=1\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)}+4\cdot\frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)}+$$

$$+2\cdot\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)}+0\cdot\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)}=$$

…

$$L_3(x)=\frac{3}{10}x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{169}{30}x+1$$



A MATLAB csomag az

yp= interp1(x,fx,xp,'módszer')

paranccsal számítja ki az $f(x)$ függvény értékét a az **xp** pontban (azaz **yp**=f(**xp**)) interpolaciós föggvény segítségével. Az interpolációs pontok az (x,fx) pontpárok (x a változóértékek sorozata, fx a függvényértékek sorozata, és ezeket a parancsot megelőzően a MATLAB szabályok alapján meg kell adnunk).

2.3 Algebrai és a transzcendens egyenletek megoldása

Azt az egyenletet, amely

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

alakú ($a_n \in Q, n \in N_0$), algebrai egyenletnek nevezzük.

Minden olyan $f(x) = 0$ egyenletet, amely nem algebrai, transzcendens egyenletnek nevezünk ($f(x)$ valós függvény).

Az

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

alakú egyenletnek a polinomokra vonatkozó szabályok alapján kereshetjük a megoldásait, és azok, ugyancsak a polinomok ide vonatkozó tulajdonságai alapján, vagy léteznek, vagy nem.

Az $f(x) = 0$ transzcendens egyenletek megoldására általában nincs ilyen egységesen értelmezhető szabály. Vannak olyan egyenletek, ahol az egyenletben szereplő függvény inverzének, ekvivalens átalakításának vagy vizsgálatának alapján megoldható az egyenlet, azaz meghatározható az $f(x)$ zérushelye, de ez nem szabályszerű.

A $2x - \sin x + e^x = 0 \Leftrightarrow G(x) = 0$, vagy az $x^2 - 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0$ egyenletek esetében például ez nem lehetséges. Nincs olyan analitikus módszer, amellyel a függvény értelmezési tartományából kiválaszthatjuk azt az x^* pontot, amelyre $G(x^*) = 0$ vagy $F(x^*) = 0$. Léteznek azonban olyan közelítő módszerek, amelyekkel iteratív eljárással, grafikusan, vagy más módon eljutunk az x^* pontig. A grafikus megoldási módok általában az egyenletekben szereplő függvények grafikonjainak geometriai tulajdonságaitól függenek.

A transzcendens egyenletek megoldásának lokalizálása – geometria értelmezés

Ha az $f(x) = 0$ egyenletben az $f(x)$ függvényről megállapítjuk, hogy folytonos egy $[a, b]$ intervallumban, és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor a függvény az $[a, b]$ intervallumon belül előjelet vált, és szükségszerűen átmetszi az *Ox* tengelyt, azaz lesz olyan $x^* \in [a, b]$ pont, amelyre $f(x^*) = 0$.

Hogyan vázolhatunk fel egy összetett transzcendens függvényt? Általában ez bonyolult feladat, de gyakran tesszük meg azt, hogy az $f(x)=0$ egyenlettel ekvivalens[15] $F(x)=G(x)$ egyenletben szereplő $F(x)$ illetve $G(x)$ függvényeket ábrázoljuk, hiszen ha

$$f(x)=0 \Leftrightarrow F(x)=G(x)$$

akkor

$$f(x^*)=0 \Leftrightarrow F(x^*)=G(x^*),$$

azaz ahol az $f(x)=0$ egyenletnek megoldása van, ott az $F(x)$ és $G(x)$ függvények értéke egyenlő (grafikonjaik metszik egymást). Vázlatot használva is könnyen elkülöníthető egy olyan $[a,b]$ intervallum, amelyre igaz, hogy $x^* \in [a,b]$, $f(x^*)=0$, és $f(a)\cdot f(b)<0$.

Bármelyik közelítő megoldó módszert is alkalmazzuk az $f(x)=0$ egyenlet megoldására, első lépésként a zérushely lokalizálása mindenképpen ajánlott.

Példa. Lokalizáljuk az $e^x+x-3=0$ egyenlet zérushelyét vagy zérushelyeit.

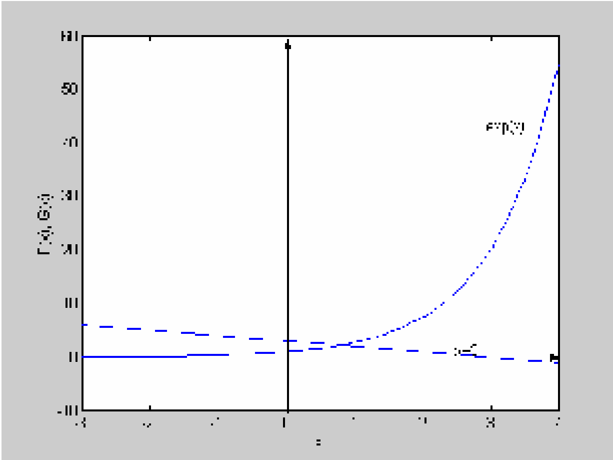
Az $f(x)=e^x+x-3$ függvény folytonos és értelmezett $\forall x \in \Re$ változóértékre, tehát ha elkülönítünk egy olyan $[a,b]$ intervallumot, amelyre igaz, hogy $f(a)\cdot f(b)<0$, akkor létezik olyan $x^* \in [a,b]$, amelyre $f(x^*)=0$ lesz.

Válasszuk szét a baloldali $f(x)=e^x+x-3$ függvényt két könnyen ábrázolható függvényre:

$$e^x+x-3=0 \Leftrightarrow e^x=-x+3,$$

és vázoljuk fel az $F(x)=e^x$ és $G(x)=-x+3$ függvényt.

[15] Az ekvivalencia itt is azt jelenti, mint általában az egyenletek esetében: két egyenlet akkor ekvivalens, ha a megoldáshalmazuk egyenlő.

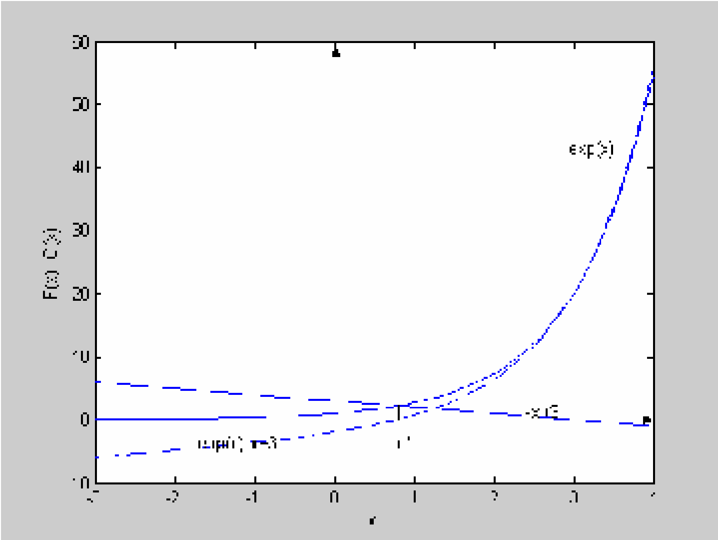


Az ábrán jól látható, hogy az az x^* pont, amelyre $f(x^*)=0 \Leftrightarrow F(x^*)=G(x^*)$, a [0.5,1] intervallumban található. Ellenőrizzük az $f(0.5)\cdot f(1)<0$ feltételt, vagyis azt, hogy a [0.5,1] intervallum két végpontjában különböző előjelű-e a függvény.

$f(0.5)=-0.8513,\ f(1)=0.7183 \Rightarrow f(0.5)\cdot f(1)<0$.

Az $f(x)$ függvény a [0.5,1] intervallumban folytonos, az intervallum végpontjaiban különböző előjelű, tehát létezik zérushelye az [0.5,1] intervallumban. A következő lépésben keressünk olyan módszert, amellyel ezt az zérushelyet pontosabban behatároljuk, vagy kellő pontossággal meghatározzuk.

Most megtehetjük ellenőrzésképpen, hiszen matematikai programcsomaggal ez egyszerű, hogy megrajzoljuk az $f(x)=e^x+x-3$ függvényt is. Látható, hogy x^* zérushelye ott lesz, ahol az F és G függvények metszik egymást, azaz ahol $F(x)=G(x)$.



Felező módszer

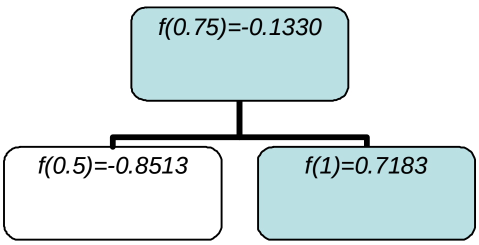
Miután elkülönítettünk egy olyan intervallumot, amelyben egy függvénynek biztosan létezik zérushelye, és folytonos, az első, és egyben legegyszerűbb módja a további pontosításnak az, hogy megfelezzük az elkülönített intervallumot, és a már ismert módszerrel ellenőrizzük, hogy a megfelezett intervallum melyik felébe kerül a zérushely. A felezést addig folytatjuk, amíg a felezési pont környezetében a függvényérték nem közelíti meg a megfelelő pontossággal a nullát.

Mutassuk meg a módszer menetét az előző példában.

Megállapítottuk, hogy az $f(x)=e^x+x-3$ függvénynek a [0.5,1] intervallumban van zérushelye, ott folytonos, és

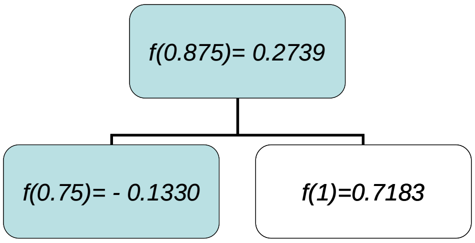
$f(0.5)=-0.8513,\ f(1)=0.7183 \Rightarrow f(0.5)\cdot f(1)<0$.

Felezzük meg a [0.5,1] intervallumot. A felezőpont 0.75. Ellenőrizzük a függvényértéket!



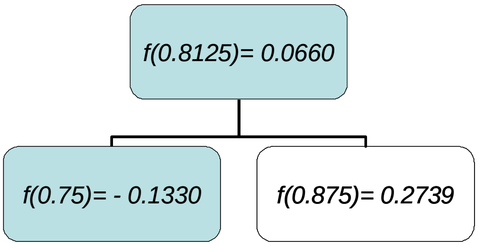
Az $f(a)\cdot f(b)<0$ feltételnek most a [0.75,1] intervallum tesz eleget.

Folytassuk a felezést a $\dfrac{0.75+1}{2}=0.8750$ ponttal.



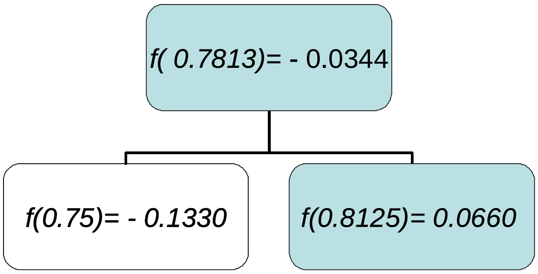
Az $f(a)\cdot f(b)<0$ feltételnek most a [0.75,0.875] intervallum tesz eleget.

Folytassuk a felezést a $\dfrac{0.75+0.875}{2}=0.8125$ ponttal.



Az $f(a)\cdot f(b)<0$ feltételnek most a [0.75,0.8125] intervallum tesz eleget.

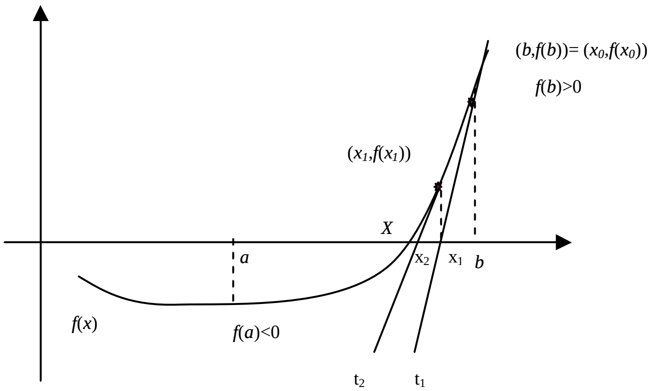
Folytassuk a felezést a $\dfrac{0.75+0.8125}{2}=0.7813$ ponttal.



A függvényérték –0.0344 most már abszolút értékében egy tizedes pontossággal megközelíti a nullát. Ha beérjük ezzel a pontossággal, elfogadhatjuk, hogy a zárushely 0.78, ha nem, akkor folytathatjuk a felezést.

Érintő módszer

Tegyük fel, hogy az $f(x)=0$ egyenletben az $f(x)$ függvényről megállapítottuk, hogy folytonos egy $[a,b]$ intervallumban, és $f(a)\cdot f(b)<0$, tehát a függvény az $[a,b]$ intervallumon belül előjelet vált, és szükségszerűen átmetszi az *Ox* tengelyt, azaz lesz olyan $x^* \in [a,b]$ pont, amelyre $f(x^*)=0$.
Vegyük fel a feltételrendszerbe, hogy az $f(x)$ függvény monoton növekvő vagy monoton csökkenő a teljes intervallumon, és nem vált monotonitást. Ebben az esetben kimondhatjuk, hogy $x^* \in [a,b]$ az egyetlen pont, amelyre $f(x^*)=0$.
Az ábrán egy monoton növekvő függvény látható amely az $[a,b]$ intervallumon rendelkezik a felsorolt tulajdonságokkal.



Rajzoljuk meg a t_1 érintőt az *f*(*x*) függvény grafikonjának $(b, f(b)) = (x_0, f(x_0))$ pontjában.
A t_1 érintő egyenlete ismert, hiszen ismert az iránytényezője az adott $(x_0, f(x_0)) = (x_0, y_0)$ pontban: $f'(x_0)$. Felírhatjuk:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

A t_1 érintő és az *Ox* tengely metszéspontját, mint minden analitikus geometria probléma esetében, úgy számítjuk ki, hogy megoldjuk az alakzatokat leíró egyenletekből álló egyenletrendszert. Ha figyelembe vesszük, hogy $y_0 = f(x_0)$ és az *Ox* tengely egyenlete $y=0$, akkor:

$$\left.\begin{array}{c} y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} = (x - x_0) \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Jelöljük a kapott pontot x_1 módon, és ismételjük meg a lépéssorozatot úgy, hogy a t_2 érintő az $f(x)$ függvény grafikonjának $(x_1, f(x_1)) = (x_1, y_1)$ pontjában húzott érintő legyen. A t_2 érintő és az *Ox* tengely metszéspontja az x_2 pont, amelyet a következő egyenletrendszerből határozunk meg:

$$\left.\begin{array}{c} y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

$$-f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Ha a lépéssorozatot folytatjuk, akkor egy olyan, az $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ pontokból álló, $\{x_n\}$ sorozatot kapunk, amely bizonyíthatóan ahhoz az $x^* \in [a,b]$ ponthoz tart, amelyre $f(x^*) = 0$. (A pontos tétel és a konvergencia bizonyítása megtalálható például a [Herceg, 1990] könyvben).

Az $\{x_n\}$ sorozatot *iterációs sorozatnak* nevezzük, amelyet *rekurzív formula* határoz meg, mert minden következő x_n tagot az előző x_{n-1} tag segítségével számítunk ki, $n = 1, 2, \ldots$, mégpedig a következőképpen:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

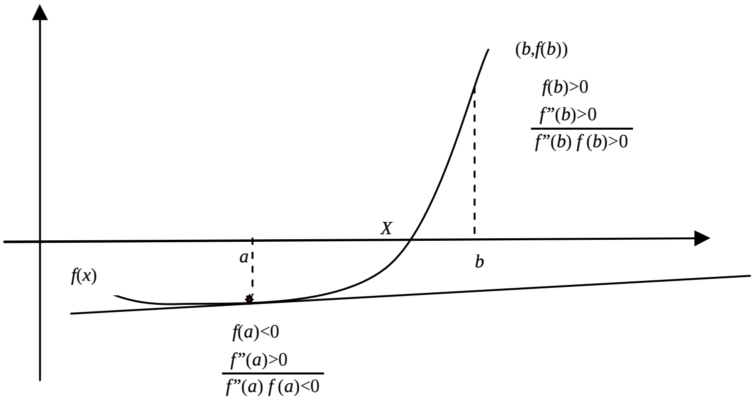
A bizonyítástól ugyan eltekintünk, de a módszer alkalmazásához szükségünk van a $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots \to x^*$ konvergencia elegendő (és szükséges) feltételeire.

Három feltételt már megismertünk. Legyen az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallum felett:

- folytonos;
- legyen monoton növekvő, vagy monoton csökkenő a teljes intervallumon, és ne váltson monotonitást;

- legyen $f(a)\cdot f(b)<0$, tehát a függvény az $[a,b]$ intervallumon belül előjelet váltson, és szükségszerűen messe az *Ox* tengelyt, azaz legyen olyan $x^* \in [a,b]$ pont, amelyre $f(x^*)=0$.

Az következő ábrán jól látható, hogy az iteráció kezdőpontját, az x_0 pontot, nem választhatjuk meg találomra. Ha például az $x_0 = a$ pontot választottuk volna az iteráció kezdőpontjául, akkor az érintő az *Ox* tengelyt az $[a,b]$ intervallumon kívül metszette volna, és az már a számunkra „ismeretlen”, kivizsgálatlan terület.



Felmerül a kérdés: mitől tegyük függővé az iteráció kezdőpontjának kiválasztását? Mikor legyen az *a*, és mikor *b*?

A módszer geometriai értelmezéséből kiindulva, újra csak bizonyítás nélkül, figyeljük meg, hogy a kezdőpont kiválasztása, és ezáltal az első érintő megfelelő helyzete is, a függvény görbéjének a ***görbületétől***, konvexitásától függ.

Az ábrákon látható függvények görbéje felülről konvex az $[a,b]$ intervallum felett, tehát felírhatjuk, hogy $f''(x)>0, x\in[a,b]$.

Az iteráció kezdőpontját úgy kell megválasztani, hogy $x_0 \in \{a,b\}$, azaz $x_0 = a$ vagy $x_0 = b$ legyen, és hogy a kezdőpont az $f''(x_0)\cdot f(x_0)>0$ feltételnek eleget tegyen. A feltétel teljesülése biztosítja azt, hogy az első érintő „biztonságos” helyen messe az *Ox* tengelyt.

Ezért választottuk az ábrázolt példában az $x_0 = b$ pontot. Itt a függvényérték pozitív a felülről konvex függvényszakasz minden pontjában a második derivált pozitív, tehát $f''(b)\cdot f(b)>0$.

Ugyanez az $x_0 = a$ pontról nem mondható el, mert $f(a) < 0$, $f''(a) > 0$, tehát $f''(a) \cdot f(a) < 0$.

Ha biztosak szeretnénk lenni abban, hogy nem tévedünk, *ellenőrizzük, hogy az* $[a,b]$ intervallum felett a *konvexitás változik-e*? Ha nem változik, akkor a kezdőpont egyértelműen kiválasztható, mert csak az egyik végpont teljesíti a feltételeket.

Ha a konvexitás változna, akkor vagy szűkítsük az $[a,b]$ intervallumot „biztonságosra”, vagy kísérjük figyelemmel az iteráció lépéseit. A módszer ugyanis időmként korrigálja önmagát. Egy esetlegesen rosszul választott pontból húzott érintő már metszheti a tengelyt „biztonságos” pontban, és a következő lépéstől kezdődően az iterációs sorozat konvergenciája már biztosított.

Foglaljuk most össze az érintő módszerrel kapott iterációs pontsorozat konvergenciájának feltételeit:

Legyen az $f : D_f \to R$ $f(x)$ függvény ($f : D_f \to R$) az $[a,b] \subset D_f$ intervallum felett:

- folytonos;
- legyen monoton növekvő, vagy monoton csökkenő a teljes intervallumon, és ne váltson monotonitást;
- legyen $f(a) \cdot f(b) < 0$, tehát a függvény az $[a,b]$ intervallumon belül előjelet váltson, és szükségszerűen messe az *Ox* tengelyt, azaz legyen olyan $x^* \in [a,b]$ pont, amelyre $f(x^*) = 0$.
- Az iteráció kezdőpontját úgy kell megválasztani, hogy $x_0 \in \{a,b\}$, azaz $x_0 = a$ vagy $x_0 = b$ legyen, és hogy a kezdőpont az $f''(x_0) \cdot f(x_0) > 0$ feltételnek eleget tegyen. Ezután rekurzív formulával határozzuk meg az $\{x_n\}$ iterációs sorozat többi tagját:

  $$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \ n = 1,2,....$$

A felsorolt feltételek mellett az $x_0, x_1, x_2, ...x_n, ... \to x^*$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$) konvergencia biztosított.

Az iterációs lépéseket addig ismételjük, amíg a zérushelyet nem kapjuk meg a kellő pontossággal. A leállás feltétel például lehet az, hogy az egymást követő iterációs pontok már kellő számú tizedes jegyben megegyeznek, azaz a különbségük egy előre meghatározott e határ alá süllyed:

$$|x_{n+1} - x_n| < e \ ,$$

vagy ha

$$|x_n - x_{n-1}| < 0.5 \cdot 10^{-k} \ ,$$

ami azt jelenti, hogy az iterációval kapott utolsó pontnak k biztos tizedes jegye van.

A számításokat végezzük legalább k+1 tizedes pontossággal, ha k ismert, és a tizedes jegyek számának felírásban legyünk következetesek (ne számoljunk egy, máskor 4 tizedes jeggyel).

Ha k nem ismert, számoljunk 4 tizedessel, mint ahogyan azt apriori a számítógépes matematikacsomagok is általában teszik.

A MATLAB programcsomag a fzero(‘függvény’, x_0) paranccsal határozza meg a függvény zérushelyét, azaz egy transzcendens egyenlet megoldását, de amint látjuk, az iteráció kezdőpontját akkor is meg kell adnunk. Ezért fontos a minél pontosabb intervallumkiválasztás.

Ugyancsak elkerülhető a pontos mértani zérushely-környezet meghatározásával, hogy egy kiválasztott intervallumban több zárushely legyen. Ezt mindenképpen kerüljük el, mert félrevezetheti a módszer alkalmazóját, ha több előjelváltás is történik a kiválasztott intervallumon belül.

Gyakoroljunk! Rajzoljon az olvasó különböző görbületű, monotonitású, előjelet váltó függvényeket, és rajzolással alkalmazza rájuk az érintő módszert. Ellenőrizze a módszer biztonságosságának feltételeit!

Minden zérushelyre külön iterációs érintő-eljárást alkalmazzunk!

Példa. Lokalizáljuk az $f(x) = x^2 - 2 - \ln x$ függvény zérushelyét (zérushelyeit), és érintő módszerrel határozzuk meg az $x^2 - 2 - \ln x = 0$ egyenlet megoldását (megoldásait) két tizedes pontossággal!

Megoldás.

Az $f(x)=x^2-2-\ln x$ függvény görbéjének megrajzolása összetett feladat, alkalmazzuk tehát a korábban leírt módszert!

$x^2-2-\ln x=0$ $\hat{U}$ $x^2-2=\ln x$.

Rajzoljuk meg az egyenlet bal és jobb oldalán található függvényeket $f_1(x)=\ln x$ és $f_2(x)=x^2-2$, és figyeljük meg, mely pontokban lesz $f_1(x)=f_2(x)$.

Az $f_1(x)=\ln x$ és $f_2(x)=x^2-2$ függvények görbéi az M_1 és M_2 pontokban metszik egymást. Vetítsük a pontokat az *Ox* tengelyre! Azt látjuk, hogy $0<x_{M_1}<1$ és $1<x_{M2}<2$, tehát az eredeti $x^2-2-\ln x=0$ egyenletnek két megoldása van.

Válasszunk ki egyet, például a azt, emlyik nagyobb 1-nél. Eza pont az M_1. Ennek a pontnak az egyenlet olyan megoldása felel meg, amely az [1,2] intervallumban helyezkedik el.

Ezzel a zérushely (egyenletmegoldás) lokalizációját, helyzet-meghatározását befejeztük.

Ha az érintő módszert akarjuk alkalmazni, akkor ellenőriznünk kell a feltételek teljesülését.

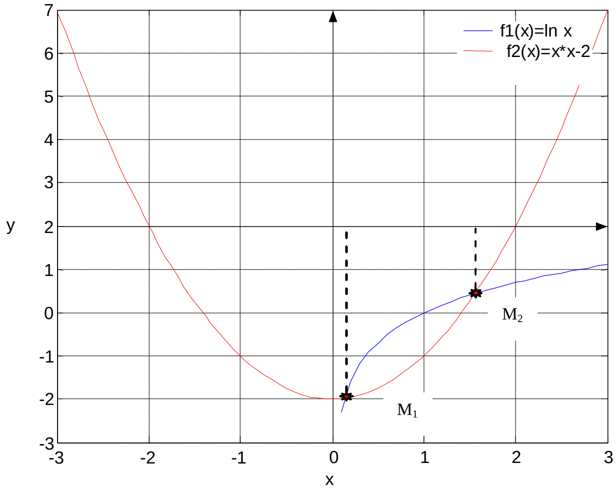
A kiválasztott intervallum: $[a,b]=[1,2]\Rightarrow a=1, b=2$.

A függvény (az eredeti egyenlet jobb oldala) $f(x)=x^2-2-\ln x$ folytonos ezen az intervallumon, szakadási pontja nincs.

1. Ellenőrizzük az előjelváltást!

$$f(1)=1^2-2-\ln 1=-1<0$$
$$f(2)=2^2-2-\ln 2=1-2-\mathit{0.6931}=\mathit{1.3069}>\mathit{0}$$
$$\Rightarrow f(\mathit{1})\cdot f(\mathit{2})<0$$

A feltétel teljesül.



2. Ellenőrizzük a monotonitást!

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} \Rightarrow f'(x) > 0, x[1,2] \ .$$

A függvény tehát monoton növekvő a teljes [1,2] intervallumon. Ez a feltétel is teljesül.

3. Görbület ellenőrzés

$$f''(x) = \frac{4x \cdot x - 1 \cdot (2x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 + 1}{x^2} > 0, x \in [1,2].$$

A függvény nem változtatja a görbületét, mindenhol, a teljes [1,2] intervallumon. felülről konvex. A feltétel teljesült.

4. Válasszuk ki az iteráció kezdőpontját!

$$f(1) = -1, f''(1) = 3 \Rightarrow f(1) \cdot f''(1) < 0 \ ,$$

$$f(2) = 1{,}3069, f''(2) = 4.5 \Rightarrow f(2) \cdot f''(2) > 0 \ ,$$

azaz a feltétel a $b = 2$ pontra teljesül, tehát $x_0 = 2$.

Minden feltételt ellenőriztünk, tehát alkalmazhatjuk az iterációs képletet, és a kapott pontsorozat az egyenlet megoldásához tart majd.

A kapott eredményeket és az iterációs pontsorozatot, azaz az $x_i, f(x_i), f'(x_i)$ értékeket foglaljuk táblázatba, így azok könnyebben áttekinthetők (i az iterációs lépés sorszáma).

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	2	1.3069	3.5000
1	1.6266	0.1593	2.6384
2	1.5662	0.0043	2.4939
3	1.5645		

Ahol: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \dfrac{1.3069}{3.5000} = \mathit{1.6266}$

$$f(\mathit{1.6266}) = \mathit{1.6266}^{2} - 2 - \ln(\mathit{1.6266}) = \mathit{0.1593}$$

$$f'(\mathit{1.6266}) = \left(2\cdot \mathit{1.6266}^{2} - 1\right)/\,\mathit{1.6266} = \mathit{2.6384}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.6266 - \frac{0.1593}{2.6384} = \mathit{1.5662}$$

$$f(\mathit{1.5662}) = \mathit{1.5662}^{2} - 2 - \ln(\mathit{1.5662}) = \mathit{0.0043}$$

$$f'(\mathit{1.5662}) = \left(2\cdot \mathit{1.5662}^{2} - 1\right)/\,\mathit{1.5662} = \mathit{2.4939}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \mathit{1.5662} - \frac{0.0043}{2.4939} = \mathit{1.5645}.$$

Már a 2. iterációs lépésben azt kaptuk, hogy $f(x_2) = 0.0043 < 0.5\cdot 10^{-2}$, tehát a függvényérték tekintetében, (ami határesetben 0 kell legyen) mát teljesült a két tizedes pontossággal kapcsolatos feltétel.

Az iteráció 3, lépése után viszont már a kapott x_2 és x_3 iterációs pontok különbsége sem nagyobb a két tizedes nagyságrendnél:

$|x_3 - x_2| = |1.5645 - 1.5662| = 0.0017 < 0.5\cdot 10^{-2}$.

Közelítő módszerrel tehát azt kaptuk, hogy az $f(x) = x^2 - 2 - \ln x$ függvény 1-nél nagyobb zárushelye, illetve az $x^2 - 2 - \ln x = 0$ egyenlet megoldása (két titedes pontossággal) $X = 1.56$.

2.4 Runge Kutta módszer

Az $y' = F(x, y)$ alakú lineáris differenciálegyenletnek, amennyiben az felírható szétválasztható, homogén vagy közönséges lineáris differenciálegyenlet alakjában, illetve más, ezen alakú egyenletekre visszavezethető differenciálegyenlet alakjában, és ha a megoldás folyamán megjelenő határozatlan integrálok megoldhatóak, létezik általános $y = f(x,C)$ megoldása. A C konstans változásával egy függvénycsaládot kapunk megoldásul. Amennyiben adott az $y_0 = f(x_0)$ kezdeti feltétel, azaz egy (x_0, y_0) pont, amelyen a differenciálegyenlet megoldásának gráfja áthalad, a C konstans értéke kiszámítható, és a függvénycsaládból kiválasztható az a függvény, amely kielégíti az adott $y' = F(x, y)$ differenciálegyenletet is, és az $y_0 = f(x_0)$ kezdeti feltételt is.

Gyakran azonban a megoldás folyamán olyan integrált kellene kiszámítani, amely nem oldható meg analitikus úton, vagy a differenciálegyenlet helyettesítések után sem hozható olyan alakra, amelyet az ismert módszerekkel megoldhatunk.

A kezdeti feltétel ugyanakkor meghatároz egy megoldást, mégpedig egy adott pont (az (x_0, y_0) pont) környezetében. A differenciálegyenlet közelítő megoldásához elegendő a $y' = F(x, y)$ összefüggés és a megoldás egyik pontja, az (x_0, y_0) pont. Ebből a pontból kiindulva rekurzív úton (azaz az előző számítási lépések eredményeit felhasználva) meghatározhatóak a megoldás további pontjai. A közelítő számítás megengedhető hibája határozza meg, hogy az x_0 ponttól számítva mekkora távolságra és milyen változóközökkel számíthatóak ki az $y = f(x)$ megoldásfüggvény étékei megbízható pontossággal.

A fent említett problémára több közelítő módszer ad megoldást (például az Euler féle és a trapéz módszer). A Runge Kutta[16] módszer az egyik legelterjedtebb, pontossága elfogadható, és több szoftverplatform is támogatja (többek között a MATLAB is.)

2.4.1 A Runge Kutta módszer feltételrendszere

Legyen adott az $y' = F(x, y)$ alakú lineáris differenciálegyenlet és hozzá az $y_0 = f(x_0)$ azaz az (x_0, y_0) kezdeti feltétel. Határozzuk meg a differenciálegyenlet megoldásait az $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ pontokban azaz az $[a,b] = [x_0, x_n]$ intervallumon.

[16] **Kutta, Martin Wilhelm (**Pitschen, Felső-Szilézia (ma Byczyna, Lengyelország), 1867. nov. 3. - Fürstenfeldbruck, Németország, 1944. dec. 25.), német matematikus.

Az $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ pontokban a megoldásfüggvény értékei:

$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots y_n = f(x_n)$.

Az (x_0, y_0) pontpár adott, mint a kezdeti feltétel. Az $[a,b] = [x_0, x_n]$ intervallum x_i osztópontjait (i=1,2,…n) azonos közökkel határozzuk meg a következőképpen:

- legyen $h = \frac{b-a}{n} = \frac{x_n - x_0}{n}$,
- $x_{i+1} = x_i + h$, (i=0,1,2,…n-1).

A megoldásfüggvény értékeit rekurzív képlettel számítjuk:

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$, ($i$=0,1,2,…$n$-1), ahol az adott lépésben

$$K_1 = F(x_i, y_i)$$

$$K_2 = F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = F(x_i + h, y_i + hK_3).$$

A számításban szereplő négy K_i paraméter a két szomszédos osztópont közötti függvényértékeket közelíti, ezért ezt a módszert **negyedrendű Runge Kutta** módszernek nevezzük. Létezik másodrendű Runge Kutta módszer is, amely két köztes K_i paramétert használ a rekurzív képletben.

Példa. A módszert olyan differenciálegyenlet megoldásán mutatjuk meg, amelyet analitikus módon is megoldunk, így a kapott eredményeket ellenőrizhetjük.

Oldjuk meg az $y' = \frac{x^2}{y}$ egyenletet, ha adott az $(x_0, y_0) = (1,2)$ kezdeti feltétel.

a) Oldjuk meg az egyenletet negyedrendű Runge Kutta módszerrel. Az egyenletből leolvashatjuk, hogy $y' = \frac{x^2}{y} = F(x,y)$. A megoldásokat számítsuk ki az $[1,3]$ intervallumon az x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 osztópontokban, azaz n=4.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{3-1}{2} = 0.5,$$

$x_{i+1} = x_i + h$, azaz

$x_0 = 1, x_1 = x_0 + 0.5 = 1.5, x_2 = x_1 + 0.5 = 2, x_3 = x_2 + 0.5 = 2.5, x_4 = x_3 + 0.5 = 3$

.

A megoldásfüggvény értékeit a rekurzív képlettel számítjuk:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

ahol az adott lépésben

$$K_1 = F(x_0, y_0) = F(1,2) = \frac{1^2}{2} = 0.5$$

$$K_2 = F\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_1\right) = F\left(1 + \frac{0.5}{2}, 2 + \frac{0.5}{2} \cdot 0.5\right) = F(1.25, 2.125) = \frac{1.25^2}{2.125} = 0.7353$$

$$K_3 = F\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_2\right) = F\left(1 + \frac{0.5}{2}, 2 + \frac{0.5}{2} \cdot 0.7353\right) = F(1.25, 2.1838) = \frac{1.25^2}{2.1838} = 0.7155$$

$$K_4 = F(x_0 + h, y_0 + hK_3) = F(1.5, 2 + 0.5 \cdot 0.7155) = \frac{1.5^2}{2.3577} = 0.9543.$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 2 + \frac{0.5}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) =$$
$$2 + 0.0833 \cdot (0.5 + 2 \cdot 0.7353 + 2 \cdot 0.7155 + 0.9543) = 2.3630$$

A megoldás következő pontja tehát $(x_1, y_1) = (1.5, 2.3630)$.

A további pontok:

$x_2 = 2$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

ahol az adott lépésben

$$K_1 = F(x_1, y_1) = F(1.5, 2.3630) = \frac{1.5^2}{2.3630} = 0.9522$$

$$K_2 = F\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}K_1\right) = 1.1774$$

$$K_3 = F\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}K_2\right) = 1.1525$$

$$K_4 = F(x_1 + h, y_1 + hK_3) = 1.3609\,.$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 2.3630 + 0.0833\cdot(0.9522 + 2\cdot 1.1774 + 2\cdot 1.1525 + 1.3609) = 2.94$$

$$(x_2, y_2) = (2.0, 2.9441).$$

A harmadik osztópontban:

$$x_3 = 2.5$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

ahol az adott lépésben

$$K_1 = F(x_2, y_2) = F(2.0, 2.9441) = 1.3587$$

$$K_2 = F\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}K_1\right) = 1.5417$$

$$K_3 = F\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}K_2\right) = 1.5205$$

$$K_4 = F(x_2 + h, y_2 + hK_3) = 1.6872\,.$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 3.7083$$

$$(x_3, y_3) = (2.5, 3.7083)\,.$$

A harmadik osztópontban:

$$x_4 = 3.0$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

ahol az adott lépésben k1 =

$$K_1 = F(x_3, y_3) = F(2.5, 3.7083) = 1.6854$$

$$K_2 = F\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2}K_1\right) = 1.8313$$

$$K_3 = F\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2}K_2\right) = 1.8153$$

$$K_4 = F(x_3 + h, y_3 + hK_3) = 1.9498\,.$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) = 4.6189$$

$(x_4, y_4) = (3.0, 4.6189)$.

Táblázatban összefoglalva:

x_i	y_i
1	2
1,5	2,3630
2	2,9441
2,5	3,7083
3	4,6189

b) Oldjuk meg az egyenletet analitikus módon. Az egyenlet elsőrendű szétválasztható differenciálegyenlet. Általános megoldása:

$$y' = \frac{x^2}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

$$ydy = x^2 dx$$

$$\int ydy = \int x^2 dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C$$

A megadott $(x_0, y_0) = (1,2)$ kezdeti feltétel alapján

$\frac{{y_0}^2}{2} = \frac{{x_0}^3}{3} + C \Rightarrow \frac{2^2}{2} = \frac{1^3}{3} + C \Rightarrow C = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$, tehát az általános megoldás függvénycsaládjából a keresett megoldás $\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}$ azaz $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}}$ (a gyökfüggvény pozitív ágát vesszük figyelembe). Számítsuk ki az így kapott megoldásfüggvény értékeit a numerikus módszernél alkalmazott osztópontokban. Táblázatba foglalva:

x_i	y_i
1	2

1.5	2.3629
2	2.9439
2.5	3.7081
3	4.6188

Megfigyelhető, hogy a kezdőértéktől távolodva a numerikus módszerrel számított és az analitikus (itt a pontos megoldásnak tekinthető) megoldás alapján számított megoldásfüggvény értékek egyre inkább eltérnek egymástól, hiszen a numerikus módszer esetében egyre kevésbé tekinthető „biztos" háttérnek az előző lépésben kapott eredmény, amikor a rekurzív formulát használjuk.

Megfigyelhetjük, hogy az adott példában, hogy az x_1 osztópontban az abszolút hiba:

$|2.3629 - 2.3630| = 0.0001$,

az x_2 osztópontban

$|2.9441 - 2.9439| = 0.0002$

az x_2 osztópontban

$|2.9441 - 2.9439| = 0.0002$, és ugyanennyi a további két osztópontban is.

A Runge Kutta módszerrel kapcsolatos hibabecslésről az [Bahvalov, 1977] forrásban olvashatunk.

c) A MATLAB programcsomag a magasabb rendű Runge Kutta módszer alkalmazásához az *ode23* parancsot ajánlja. A parancs formai követelményei alapján megszerkeszthetjük a

function fuggv = fuggv(x,y)

fuggv = x^2/y;

tartalmú *m* fájlt, és az

[*x*,*y*]=ode23(@fuggv,[1 1.5 2 2.5 3],2)

parancs eredményeként az *x* osztópont sorozatra az *y* függvényérték sorozatot kapjuk. Táblázatba foglalva:

x_i	y_i
1.0000	2.0000
1.5000	2.3629
2.0000	2.9439

2.5000	3.7081
3.0000	4.6187

Foglaljuk össze különböző módszerekkel kapott eredményeket, hogy közelítő módszerek hibáját érzékeltessük.

x_i	y_i a pontos megoldás alapján	y_i a Runge Kutta módszerrel	y_i *Ode23* paranccsal a MATLAB-ban
1.0000	2.000	2.0000	2.0000
1.5000	2.3630	2.3630	2.3629
2.0000	2.9441	2.9439	2.9439
2.5000	3.7083	3.7081	3.7081
3.0000	4.6189	4.6187	4.6187

Irodalomjegyzék

Bahvalov, N. Sz., *A gépi matematika numerikus módszerei*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1977.

Gisbert, Stoyan, MATLAB, *Numerikus módszerek, grafika, statisztika, eszköztárak, frissített kiadás,* Typotex Elektronikus Kiadó, 2005.

Szerényi Tibor: *Analízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

Herceg, Dragoslav, *Numerička matematika,* Naučna knjiga, Beograd, 1990.

www.História - Tudósnaptár_RK.mht